CORSO DI ARCHITETTURA E COMPOSIZIONE ARCHITETTONICA
PROF. GIANMARCO DE FELICE

STUDENTI : EMILIANO RICOTTA
PAOLA AGRIMI

INDICE

- **INTRODUZIONE** pag. 1
- **BREVE SINTESI STORICA SULLA STATICA DEGLI ARCHI** 2
- **FILONI DI RICERCA E APPORTO DEGLI STUDI ITALIANI** 11

ANALISI DEI MECCANISMI DI ROTTURA: "LORENZO MASCHERONI" 12

LA 'TEORIA GENERALE SULLE MURATURE': "VINCENZO AMICI" 20

RICERCA DELLE 'CURVE DI PRESSIONE ': "CELESTE CLERICETTI" 22 32

RICERCA DELLE 'AREE DI STABILITA'': " SALEMI PACE " 40

LA TEORIA ELASTICA : " ALBERTO CASTIGLIANO " 44

- **CRONOLOGIA DEGLI STUDI ITALIANI** 50
- **BIBLIOGRAFIA**

INTRODUZIONE

Il lavoro è stato articolato in modo da offrire un'analisi degli studi italiani sulle varie problematiche che riguardano il comportamento statico degli archi. Per maggior chiarezza si è scelto di offrire un primo inquadramento generale del problema tracciando una sintesi dei passaggi storici più importanti.

Principale riferimento per il "tracciato" cronologico del nostro lavoro è stato l'articolo della rivista *PALLADIO* (n° 2 dicembre 1988) di Edoardo Benvenuto, Massimo Corradi, Federico Foce, ed il testo *DEGLI ARCHI E DELLE VOLTE* dello stesso Foce e di Antonio Becchi, edito da Marsilio Editori nel 2002.

Tale ampia visione introduce poi al discorso più specifico sull'apporto teorico degli studiosi italiani per i quali è stata operata un'analisi diretta delle fonti storiche.
La suddivisione dei capitoli è stata scelta per la specificità del tema cercando di analizzare per ogni filone di ricerca il contributo importante di uno studioso italiano.

Per riannodare un percorso logico e cronologico del lavoro, si è fatto riferimento ad importanti contributi italiani quali quello di CASTIGLIANO e VINCENZO AMICI (rispettivamente per il contributo all'"analisi elastica" degli archi e per una "teoria generale sul comportamento delle murature") per i quali è stato fatto solo accenno e non si è potuti scendere nello specifico di un'analisi diretta. Per questa ragione i capitoli riferiti a tali studiosi risultano essere un breve sunto del loro operato e quindi sono evidentemente meno estesi degli altri; inoltre presentano una simbologia di presentazione diversa essendo i titoli compresi tra parentesi.
Per quel che riguarda le immagini presenti nell'elaborato, esse quasi sempre sono delle ricostruzioni grafiche dei disegni originari, ed a volte delle rappresentazioni grafiche da noi liberamente elaborate per poter esporre con più chiarezza il discorso; nel primo caso sono stati indicati i disegni con degli asterischi.

BREVE SINTESI STORICA SULLA STATICA DEGLI ARCHI

Scopo del presente capitolo è quello di offrire una prima sommaria sintesi storica degli studi sviluppatisi nel corso del XVIII e XIX secolo intorno alla statica degli archi. Se infatti nel corso del XVIII secolo erano fondamentalmente due le direttrici secondo le quali si era articolata la ricerca (cioè, la definizione della MIGLIOR FIGURA delle volte e la caratterizzazione dei MECCANISMI di ROTTURA, il primo punto analizzato) nel XIX secolo la divisione dei campi d'indagine si rende più fine inducendo a distinguere i seguente settori:

2) Metodi per la determinazione delle CURVE di PRESSIONE

3) Metodi per la definizione dei PROFILI TEORICI OTTIMALI

4) Ricerche sulle AREE di STABILITA'

5) Studi sul comportamento deformativo delle murature, nell' intento di estendere ad esse i metodi di analisi maturati nell'ambito dei SISTEMI ELASTICI.

6) L'analisi PLASTICA

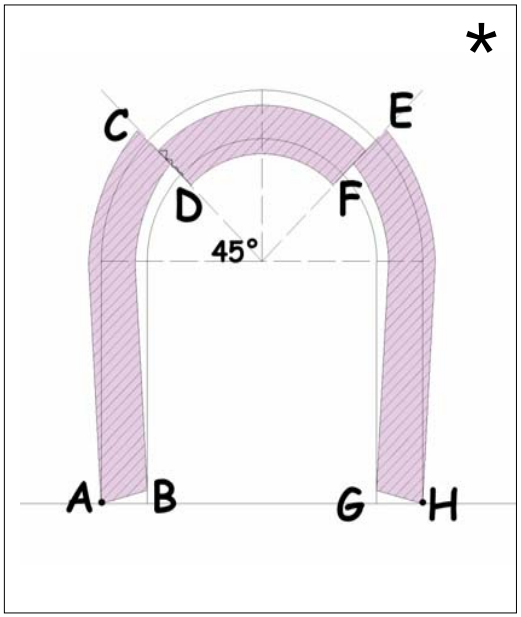
1) MECCANISMI DI ROTTURA DELLE VOLTE

La linea d'indagine che ha guidato tutti gli studi settecenteschi e gran parte degli studi ottocenteschi è quella che si propone di verificare se le dimensioni di un arco sono sufficienti ad impedire l'attivarsi di un meccanismo di collasso per l'azione del proprio peso e dei carichi aggiuntivi.

Nella breve trattazione dell'argomento (poi ripresa nella specifica analisi di Mascheroni) abbiamo scelto di seguire la distinzione dei filoni di Poncelet (1835) che pone come momento "*sparti-acque*" la pubblicazione degli studi di Coulomb (1776). Avremo quindi:

- **"AVANT COULOMB":** LA HIRE
  COUPLET
  MASCHERONI…
- **COULOMB**
- **"POST - COULOMBIANI":** PERSY
  AUDOY
  LAME'
  CLAPEYRON…

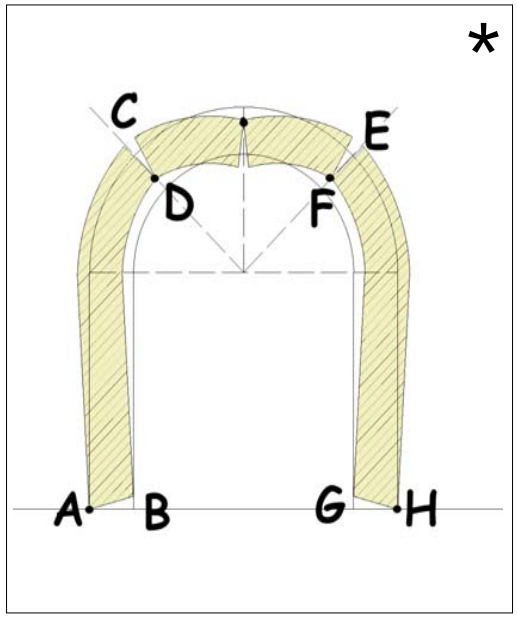
P. LA HIRE: “TEORIA DEL CUNEO” (1712)



Il meccanismo di collasso proposto da La Hire vede l’arco rompersi in 3 pezzi (con fratture alle reni che formano un angolo di 45° con la verticale) tra cui quello posto alla sommità della volta che trasla verticalmente e spinge i due ritti sottostanti a ruotare verso l’esterno.
Nel suo modello non si considera l’ATTRITO.

IL vero traguardo di La Hire fu quello di riconoscere nel corpo della costruzione la presenza nascosta di qualche “macchina semplice” le cui leggi di equilibrio, note in base ai principi della meccanica, consentono di interpretare il funzionamento della costruzione nella quale quella macchina si cela. In questo senso, pochi anni dopo La Hire, una lettura più realistica fu data da Couplet.

C.A.COUPLET: “IL COLLASSO FLESSIONALE” (17

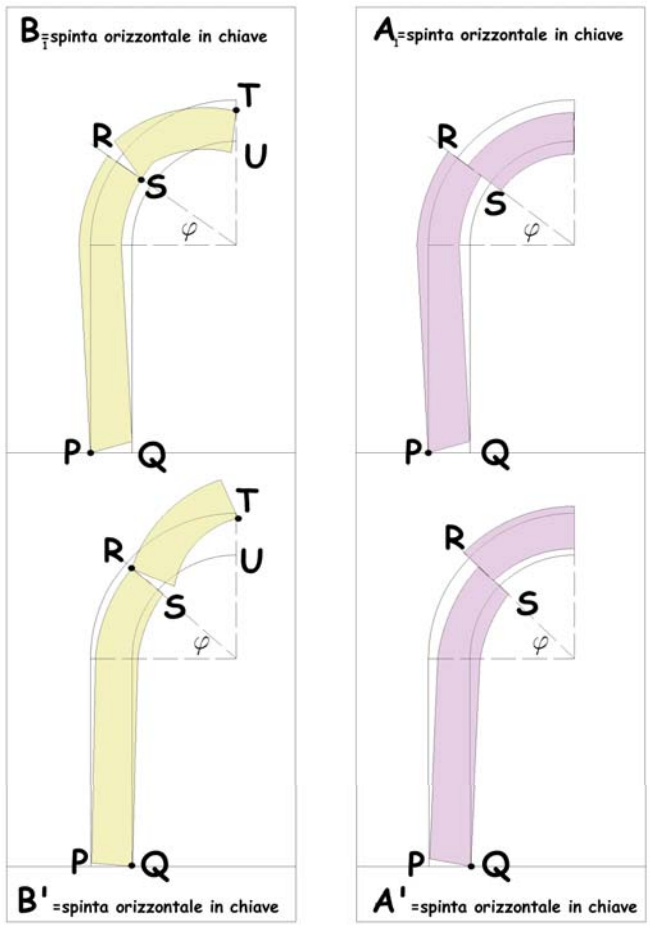


Abbandonato il modello della teoria del cuneo analizzato nel suo primo studio del 1729, Couplet, nel lavoro dell’anno successivo, suggeriva un altro modo di collasso secondo cui un arco si romperebbe in 4 parti formanti un sistema di leve articolate all’ estradosso e all’intradosso in chiave, e all’intradosso nei giunti di rottura.

COULOMB: IL PRINCIPIO DEI “MASSIMI E MINIMI” (1773)

Meriti indiscussi ebbero gli studi di Coulomb che sembrarono aver risolto il problema nella sua interezza, dato il rigore logico e la considerazione più realistica che egli ebbe sulla natura del comportamento delle volte.
Oltre ad introdurre infatti il problema della coesione delle malte e la presenza dell’attrito, Coulomb offrì un metodo di analisi per la

determinazione dei meccanismi di rottura (quattro furono quelli da lui analizzati) e del relativo valore della SPINTA ORIZZONTALE IN CHIAVE variabile con l'angolo di rottura dei giunti alle reni (f).



*

max A =A per la TRASLAZIONE verso il basso $A < A^1$

min $A=A^1$ per la TRASLAZIONE verso l'alto

max B=B per la ROTAZIONE verso il basso

min $B=B^1$ per la ROTAZIONE verso l'alto $B < B^1$

A dispetto delle potenzialità del metodo, la Teoria di Coulomb, in relazione ai modi di collasso per rotazione, è però inesatta.
Questo sarà evidenziato quasi mezzo secolo dopo da Persy, nel1825.

"POST-COULOMBIANI"

Con questo termine, coniato da Poncelet nel 1835, si usa identificare tutti gli studi che, dalla fine del settecento fino ai primi decenni dell' ottocento, ebbero lo scopo di approfondire il discorso di Coulomb allargandone lo spettro di analisi fino alla definizione di **otto meccanismi di collasso teorici** (già individuati da Mascheroni nel 1785) correggendone le incongruenze. L'obiettivo comune di tali studi è stato quello di considerare tutte le possibili combinazioni di rottura (anche quelle non verificabili nella realtà) e definire, per i meccanism di rotazione, la posizione della spinta orizzontale in chiave che nel primo lavoro di Coulomb (*Remarque I*) manca totalmente.
Non molto di nuovo però fu aggiunto da questi studi, dei quali daremo solo un breve elenco:

- **GAUTHEY (1771),** ***Memoire sur l'application des principes de la mécanique à la construction des voûtes***

- **AUDOY (1820),** ***Memoire sur la pousée des voûtes en berceau***

•**LAME' E CLAPEYRON (1823),**
Mémoire sur la stabilité des voûtes

•**PERSY (1825),** ***Course sur la stabilité des constructions***

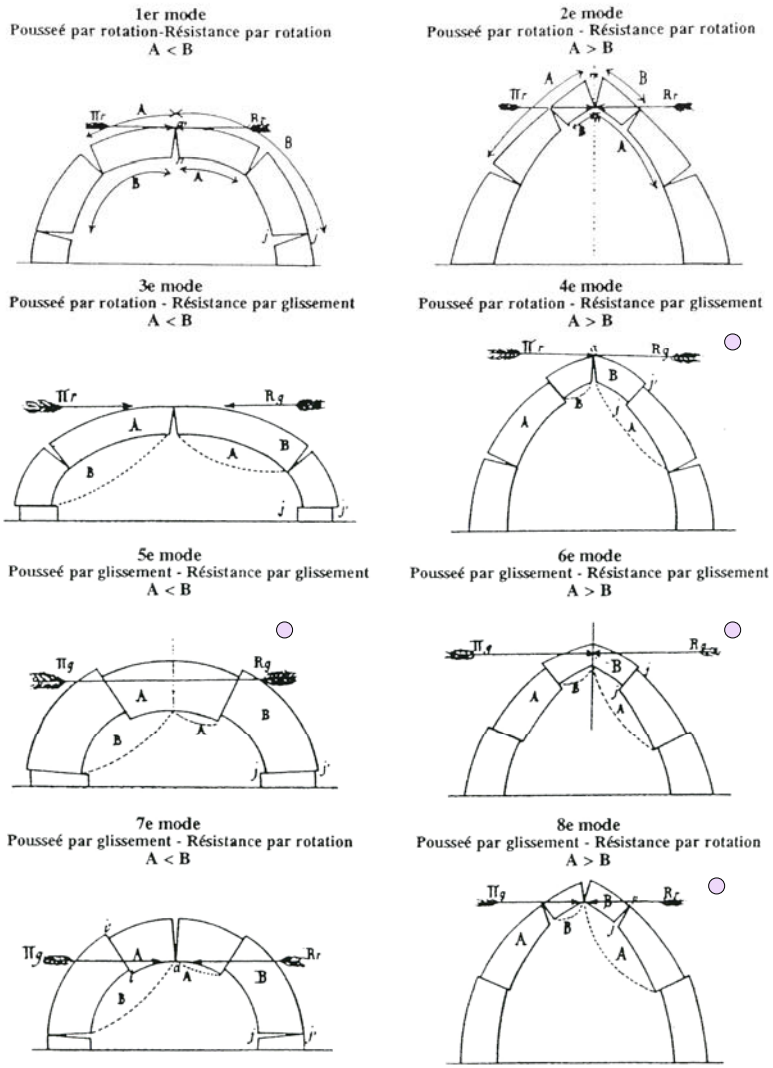
•**NAVIER (1826),** ***Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussèe sur l'application de la mecanique à l'etablissément des constructions et des machines***

•**GARIDEL, PETIT, PONCELET (1835),**
Mémorial de l'Officier du Génie

• **PIERRE FE'LIX MICHON (1848),**
Tables et formules pratiques pour l'établissement des voûtes cylindriques

---

L'immagine a lato è ripresa dallo studio di Michon con il quale si chiude l'analisi dei meccanismi di rottura. E' riassuntiva di tutti gli otto modi di collasso teorici dell'arco simmetrico.



MECCANISMI DI ROTTURA IMPOSSIBILI NELLA REALTÀ

2) STUDI SULLE “CURVE DI PRESSIONE”

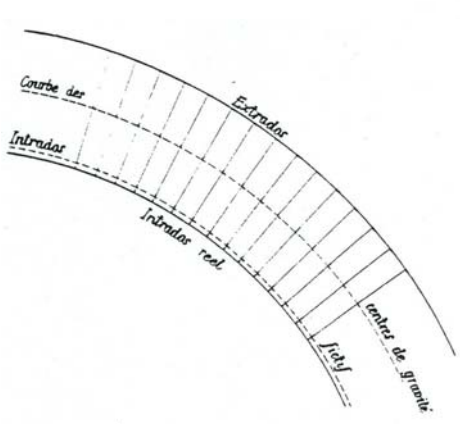
Gli studi sulla ricerca della ‘curva delle pressioni’ negli archi, hanno coinvolto tutta la ricerca ottocentesca e costituiscono uno dei capitoli più significativi dell’indagine sulla stabilità delle volte.
Un chiaro riconoscimento di questo aspetto è da attribuire a **F.J. GERNSTNER** il quale, nel 1831, introducendo per la prima volta nello studio degli archi gli strumenti grafici della linea delle pressioni e della linea di resistenza, ravvisò la possibilità di costruire un numero infinito di tali linee soddisfacenti l’equilibrio, con l’unica condizione che la linea passi all’interno dell’arco.
Successivamente a questo approccio tutta la ricerca si concentrò sulla determinazione della vera posizione delle curve di pressione.
L’interesse per il problema diede luogo in effetti a numerosi tentativi di risoluzione, secondo direzioni e con effetti differenti, molti dei quali però accomunabili sotto un unico indirizzo.
Un primo studio sulle curve di pressione, ancora in linea con le conoscenze acquisite negli ultimi decenni, fu proposto da **MERY** nel 1840 a cui si deve, tra l’altro, il merito di aver introdotto il termine di “CURVA DELLE PRESSIONI”; la sua ricerca era basata sull’ interpretazione della stabilità data da Navier e faceva ampi riferimenti alle esperienze di Boistard per la scelta dei giunti di rottura.
La teoria del Mery, che è da ritenere valida solo per volte simmetriche con carico simmetrico uniforme il cui intradosso si avvicina alla forma circolare, prevede che la curva delle pressioni sia contenuta entro il terzo medio dell’arco, passando per il suo estremo superiore alla chiave e per il suo estremo inferiore al giunto di rottura. Essa è quindi una curva limite corrispondente allo stato in cui la volta tende ad aprirsi nelle sezioni critiche per l’insorgere di sforzi di trazione tali da superare l’aderenza della malta.
Per la sua natura di curva limite vicina alla rottura, **LATERRADE,** nel 1885, sostituì la curva di Mery co una differente curva “convenzionale” passante per i centri della chiave e del giunto di rottura.
L’indeterminatezza statica che si scontrava con il principio deterministico indirizzò gli studi verso la ricerca di un nuovo “principio statico” atto a rimuovere le incertezze. In questa direzione un metodo sostanzialmente differente da quelli citati era già stato proposto da **MOSELEY** nel 1839, sulla base di un principio generale detto della MINIMA RESISTENZA.
Tale principio stabiliva che la linea di resistenza effettiva è quella che rende minima la spinta orizzontale in chiave.

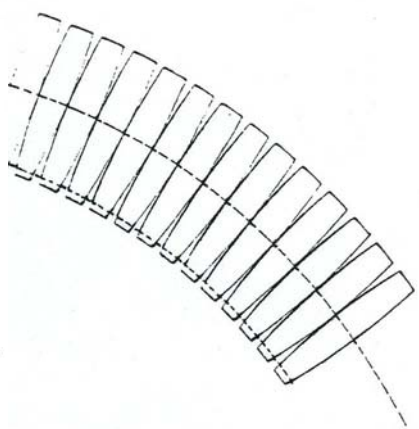
3) RICERCA SUL PROFILO OTTIMALE DELLE VOLTE

Parallelamente agli studi intorno alla curva delle pressioni, la ricerca ottocentesca trattò il problema della “stabilità” anche dal punto di vista dell’ottimizzazione strutturale (cioè la maggior “stabilità” possibile col minimo impiego di materiale) riabbracciando così una tradizione che aveva avuto un ruolo privilegiato negli studi settecenteschi. Molte furono le soluzioni proposte, basate su procedimenti di calcolo spesso laboriosi ma comunque forniti di abachi e tabelle per garantirne un più facile impiego.

Due furono i principali approcci con cui si condussero gli studi: il primo riguardava la **determinazione della linea dei carichi** facendo coincidere l’asse dell’arco con la funicolare degli stessi; il secondo, opposto al primo, si basava sulla **ricerca di un profilo ottimale dell’arco** che permettesse la coincidenza tra il suo asse geometrico e la curva di equilibrio, ovviamente per una condizione di carico nota. In questo frangente il primo importante contributo è da attribuire a **Y. VILLARCEAU** la cui memoria fu presentata all’*Accadémie des Sciences* nel 1845 e pubblicata postuma nel 1854. Inoltre altri importanti contributi sono sicuramente da attribuire, nel 1886, a **TOURTAY** e a **LEGAV**.

Villarceau immaginò la volta divisa in cunei infinitamente piccoli con i letti normali all’estradosso, per i quali determinò i baricentri collegandoli poi con una linea definita la “curva dei centri di gravità”. Sui letti fittizi dei conci egli segnò i punti simmetrici all’estradosso rispetto alla curva citata, individuando così una nuova linea d’intradosso fittizio in sostituzione di quella reale; senza alterare il peso dei conci, inoltre, egli pensò di attribuire ad essi una forma ideale in modo da ridurne il contatto ai soli punti della curva dei centri di gravità ed **eliminare così dallo studio del problema gli aspetti relativi all’attrito e all’aderenza della malta.** Sottintesa la resistenza a compressione dei conci, Villarceau così si propose di determinare analiticamente il profilo dell’intradosso fittizio in modo da far coincidere la curva dei centri di gravità con quella delle pressioni.





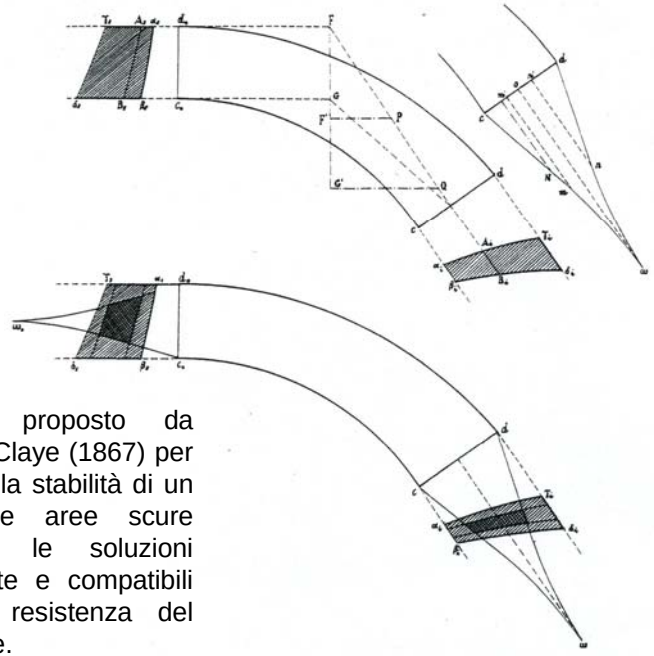
4) STUDI SULLE “AREE DI STABILITÀ”

È comunque riconosciuta la difficoltà di individuare la condizione reale di stabilità dell’arco, a tal punto che molti autori si limitarono a verificare l’esistenza di tale condizione: cioè se, per una volta assegnata, è possibile individuare una qualsiasi situazione che soddisfi l’equilibrio e sia compatibile con la resistenza del materiale, senza che essa rappresenti quella reale. Seguendo questo approccio, nel 1867, **DURAND-CLAYE** elaborò un procedimento (vedi figura) col quale definire, per ogni sezione dell’arco, i limiti ammissibili della spinta in chiave e della risultante al generico giunto attraverso una “area di stabilità”. Studiando le condizioni di equilibrio e di resistenza per una porzione di volta compresa tra la chiave e un giunto qualsiasi, e ripetendo questa operazione per vari giunti tenendo fissa la chiave, egli individuò **varie aree di stabilità** per la spinta in chiave:

1. se queste hanno una parte in comune, la chiave comprende e rappresenta tutte le soluzioni possibili;
2. se le aree non si sovrappongono neanche in un punto la volta non è stabile;
3. se l’area comune si riduce ad un punto, vi è solo una soluzione ammissibile.

Del procedimento di Durand-Claye, però, sembra non vi sia stato seguito nella pratica, causa la complicazione ed il numero delle costruzioni in gioco, ma suscitò comunque interesse.

Un metodo analogo, seppur comprendente il caso del sovraccarico agente normalmente all’estradosso, lo si può ritrovare nel 1875 in **PEAUCELLIER**, e nel 1879 da **GOBERT** il quale, analogamente all’italiano **CARVALLO**, tentò di determinare l’estradosso di una volta ricorrendo nuovamente alle aree di stabilità. Ancora nel 1879, un nuovo procedimento venne escogitato: ne fu l’artefice un altro italiano, **GIOVANNI SALEMI PACE** (che vedremo approfonditamente più avanti) il quale, richiamandosi alle ricerche settecentesche, prese spunto dalle esperienze di Boistard per “dimostrare” che la curva delle pressioni, in una volta caricata simmetricamente, non è indeterminata.



Metodo proposto da Durand-Claye (1867) per valutare la stabilità di un arco. Le aree scure indicano le soluzioni equilibrate e compatibili con la resistenza del materiale.

5) L'ANALISI ELASTICA

Fin dal 1872 J.R. **Perrodil** aveva suggerito l'estensione delle formule della resistenza dei materiali allo studio delle volte murarie, riproponendo la nuova impostazione del problema in una serie di pubblicazioni successive. Nel 1875 inoltre, **F. Crotti**, criticando la già ricordata memoria di **CLERICETTI** nella quale il principio della cerniera di Dupuit era assunto a fondamento di una nuova personale teoria sulla volta, sostenne che la ricerca della curva di pressione "*deve farsi dietro considerazioni desunte dalla teoria dell'elasticità, in base ai cedimenti e spostamenti dei cunei*".

Non è un caso quindi che, a partire dallo stesso anno, venne pubblicato nelle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino un esteso lavoro di **G. Curioni**, nel quale lo studio delle volte venne affrontato partendo dalle formule delle deformazioni elastiche ricavate per la trave curvilinea; inoltre nel 1876 **ALBERTO CASTIGLIANO** (che tratteremo più avanti) applicò le formule dedotte dai teoremi sul lavoro di deformazione al calcolo delle volte murarie.

Il nuovo orientamento dei primi studiosi e sostenitori del metodo elastico per le strutture murarie segnò fortemente la ricerca scientifica di fine ottocento: in questo contesto sono da ricordare i contributi di **Lavoinne** e **Resal**, le applicazioni grafiche di **Eddy** compiute da **Guidi** e **Ovazza**, quelle eseguite da **Ferria** utilizzando il metodo di Castigliano, le prime indagini sul comportamento deformativo delle volte ad

Così, i dubbi sulla validità della legge sulla deformazione elastica di solidi murari nell'ipotesi del materiale rigido, scomparvero dalle trattazioni degli "elasticisti" per i quali il problema divenne quello di garantire il rispetto delle condizioni teoriche in modo che lo schema dell'arco incastrato trovasse corrispondenza nella costruzione reale. Quindi assicurare l'immobilità degli appoggi, murare su centine indeformabili, scegliere attentamente i materiali, eseguire il disarmo lentamente e a tempo debito, costituivano ormai garanzie sufficienti per ritenere giustificata l'applicazione del calcolo elastico.

Sperimentazioni e proposte:

Fig. 1: archi sperimentali utilizzati dalla "Commissione delle volte" austriaca per lo studio del comportamento di deformazione nelle grandi arcate da ponte.

Fig. 2: l'arco a tre cerniere è l'ultima proposta ottocentesca per eludere il problema dell'indeterminazione statica nell'equilibrio di un arco.

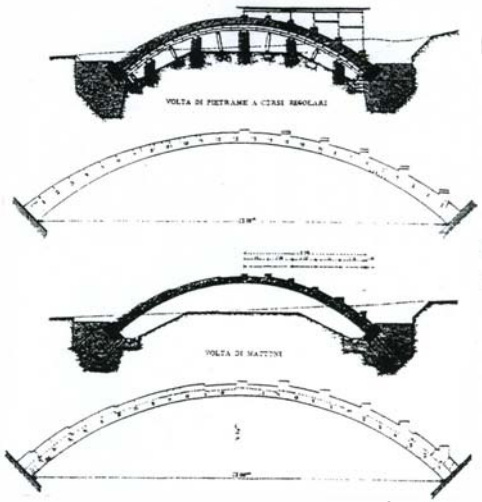


Fig. 1

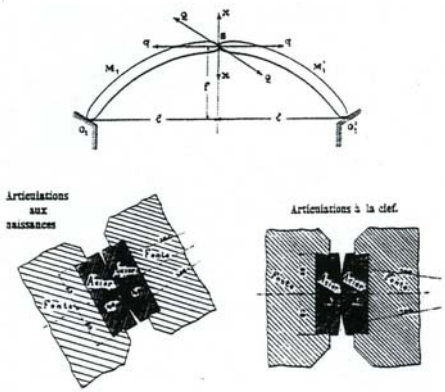


Fig. 2

6) L'ANALISI "PLASTICA"

Le esperienze in campo elastico alle quali faranno riferimento i sostenitori della "nuova teoria" degli anni successivi, avevano dato in realtà un contributo più qualitativo che sostanziale del comportamento elastico delle volte di prova, rivelando inoltre che la proporzionalità tra i carichi e le deformazioni osservate non era perfettamente lineare neanche prima dell'inizio della fessurazione, anche variando a seconda dei punti, più o meno sollecitati, presi a riferimento sugli archi per le misure degli spostamenti. Ed è in questo contesto di discrepanze fra le aspettative teoriche del calcolo elastico e i risultati di numerose misurazioni sperimentali che si inserisce, a partire dai primi anni trenta del XX secolo, lo studio sulla meccanica dei solidi e delle strutture sperimentando quello che William Addis (rifacendosi al modello delle rivoluzioni scientifiche di Kuhn) ha definito come il **"*plastic design revolution*"**, cioè quella "rivoluzione" che ha definito una filosofia strutturale alternativa a quella affermatasi nel XIX secolo.

All'inizio degli anni cinquanta, analisi elastica ed analisi plastica divengono due metodologie di calcolo parallele e fra le quali l'ingegnere può convenientemente scegliere a seconda delle richieste di verifica statica. Di fronte ad uno stesso sistema strutturale, esse si pongono domande differenti in relazione al modo di garantirne la sicurezza:

1. quella **elastica** fissa le azioni esterne e cerca i conseguenti stati effettivi di tensione, deformazione e spostamento attraverso tutte le equazioni di equilibrio, congruenza e legame elastico lineare, con lo scopo di verificare se quegli stati effettivi sono localmente contenuti entro limiti ammissibili d'esercizio;
2. quella **plastica** invece, fissa le massime prestazioni di resistenza offerte da una sezione e cerca le azioni esterne per le quali la struttura non ha più risorse in grado di garantire l'equilibrio globale ed è quindi destinata a collassare per formazione di un meccanismo.

All'atto pratico, con riferimento all'arco murario, il nuovo approccio è stato occasionalmente applicato da **A. KOOHARIAN** nel 1953 (del quale va ricordato il *Limit analysis of voussoir – segmental – and concrete arches*, "Journal of the American Concrete Institute, 1953) su suggerimento di Drucker. Ma la vera svolta avviene con **JACQUES HEYMAN** che porta la filosofia dell'analisi limite dallo *steel* allo *stone skeleton* avviando, a partire dalla metà degli anni sessanta, una serie di studi grazie ai quali la teoria delle strutture murarie ha acquistato semplicità e coerenza alla luce dei due teoremi fondamentali della plasticità e sulla base di ragionevoli ipotesi sul materiale muratura.

FILONI DI RICERCA E APPORTO DEGLI STUDI ITALIANI

ANALISI DEI MECCANISMI DI ROTTURA:
“LORENZO MASCHERONI”

NUOVE RICERCHE

SULL' EQUILIBRIO

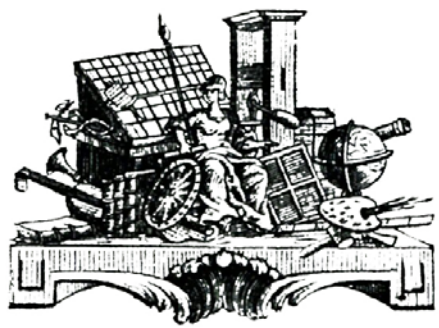
DELLE VOLTE

DELL' ABATE

LORENZO MASCHERONI

Professore di Filosofia nel Collegio Mariano Acc. Ecc., e corrispondente dell' Accademia di Padova.

Quid velit, & possit rerum concordia discors.
Horat. ad Iccium.



BERGAMO

PER FRANCESCO LOCATELLI

1785.

MECCANISMI DI ROTTURA E PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

> ***Nascerà lo Equilibrio dalla eguaglianza delle forze; noi verremo a considerare il rapporto, che possono avere tra loro due forze contrarie facendo seguire per supposizione il moto di due centri di gravità per due linee infinitesime da una parte, e dall'altra; l'uno de' quali due moti sia effetto dell'altro" .***
> **Mascheroni (1785)**

Nello scenario di ricerca sulle possibili modalità di rottura degli archi in muratura, Mascheroni si pone, usando un termine di Poncelet (1835) come un "avant - Coulomb". Nonostante i suoi scritti siano stati pubblicati un decennio dopo quelli di Coulomb, egli sembra aver portato avanti studi indipendenti di analisi del problema non riferendosi al principio dei massimi e minimi, come faranno tutti gli studiosi "post - coulombiani", ma applicando in un uso sistematico e centrale il **PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI**. In effetti, quando si tratta di indagare l'equilibrio limite di un sistema rigido-labile, quale è l'arco formato da conci giustapposti indeformabili, secondo l'ipotesi di Mascheroni è naturale riconoscere in tale

Su di esso si fonderà, non a caso, il *limit design* dei sistemi rigido o elasto-plastici nel cui ambito possono includersi le ipotesi di Heyman.

Al di là di giustificazioni strettamente operative occorre riconoscere che il principio dei lavori virtuali ha connotato l'intero sviluppo della "scienza dei pesi" prima della formalizzazione del concetto di forza nel senso modernamente inteso. Come osservato da Anna Sinopoli, a partire dai Problemi meccanici dello *pseudo-Aristotele*, l'indagine della condizione di equilibrio delle cosiddette "macchine semplici", veri e propri meccanismi soggetti a pesi, è stata intesa come ricerca della condizione di moto non attivato esprimibile attraverso l'annullarsi del lavoro di quei pesi in corrispondenza di un movimento virtuale di un loro punto di applicazione.

Questa lunga tradizione metodologica basata sul principio dei lavori virtuali, prima di Mascheroni, è rintracciabile in altri studi sul collasso delle strutture voltate in muratura. Un primo noto esempio risale al *Parere dei tre matematici* in merito alla stabilità del sistema cupola-tamburo-contrafforti della chiesa di S. Pietro a Roma.

ANALISI DI MASCHERONI SULL'EQUILIBRIO DELLE VOLTE

Il contributo di Mascheroni all'analisi delle strutture voltate in muratura è contenuto nell' opera *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte* pubblicata nel 1785 e riedita nel 1819 e nel 1829.

La sua analisi si può facilmente riassumere in pochi passaggi da cui si evince la mirabile forza del modo di argomentare di Lorenzo Mascheroni.

E' possibile riassumere in modo schematico i passaggi analitici del suo discorso che approda ad una logica conclusione, pur se estremamente ingenua, sulla possibilità di poter individuare il modo di collasso di un arco simmetrico. Il suo studio, articolato in tre fondamentali sezioni **(*Capo I: "Equilibrio de' Rettilinei*, *Capo II : "Equilibrio delle volte"*, *Capo III : "Della grossezza degli archi"*)** sviluppa per gradi un discorso che parte con l'analisi cinematica di SISTEMI DI ASTE INCERNIERATE a un grado di libertà *(Problema I-II).* Tale approccio gli servirà poi per confrontare il COMPORTAMENTO CINEMATICO DELL'ARCO con quello delle leve suddette, considerate come "macchine semplici" nascoste all'interno dell'arco.

Nel passaggio dall'analisi dei semplici "*Rettilinei*" a quello delle volte Mascheroni introduce gli elementi forse più interessanti del suo lavoro ampliando L'ANALISI DEI TIPI DI ROTTURA; considera :

- **COLLASSO FLESSIONALE (*Problema X)***
  [nei due versi di caduta]
- **COLLASSO ALLA "LA HIRE" (*Problema XI*)**
  [nei due versi di caduta]
- **COLLASSO PER SOLO SCORRIMENTO (*Problema XII*)**

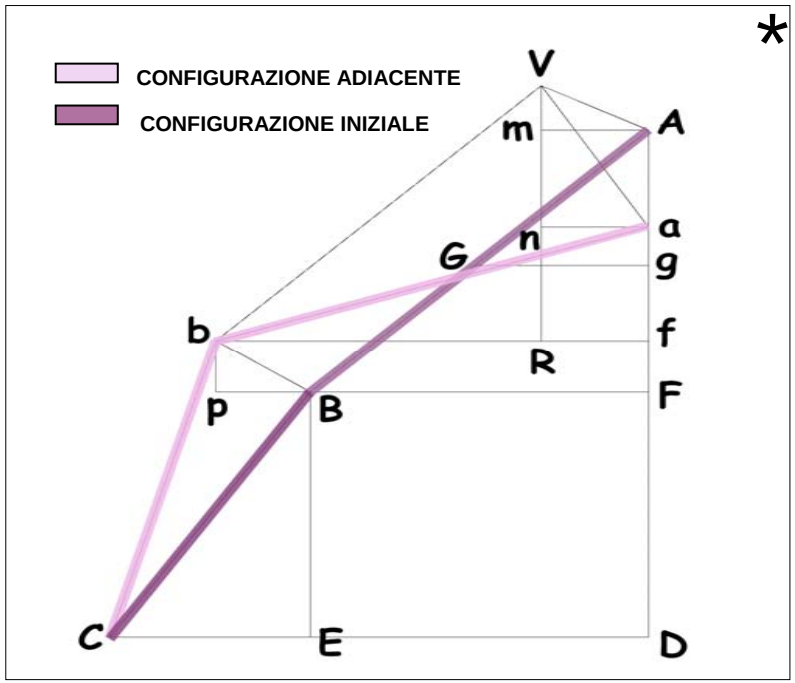
[ne dà solo una trattazione teorica ben riconoscendo l'impossibilità del suo verificarsi nella realtà]. Inoltre accenna ad altri due meccanismi misti di rottura arrivando a comprenderne tutti gli otto ipotetici (*Capo III*):

"potrebbe darsi , che l'arco ABB'A' girasse attorno al centro A, e si abbassasse il punto B' facendo sdrucciolare in su il pezzo B'C'BC parallelamente a se stesso sulla direzione CC'; ovvero che discendendo questo pezzo B'C'CB parallelamente a se stesso sulla medesima direzione,si alzasse il punto B del pezzo superiore girando attorno al centro A'".

Dall'analisi dei vari meccanismi, applicando il PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI ***("Ragione delle Forze")*** definisce delle formule per ogni tipo di collasso nelle quali compare sempre un termine comune (Q x CK/BE). Il meccanismo che corrisponde al valore più alto del termine comune è quello che si verificherà nella realtà.

CAPO I: "EQUILIBRIO DE' RETTILINEI"

Problema I



"Si supponga in A un peso A, che debba scorrere per la linea AD perpendicolare all'orizzonte, nel tempo che il peso B posto all'estremità della verga inflessibile AB* (linea rossa in figura) *gira intorno al centro C col raggio BC; trovare la ragione delle forze"

Nota:
la nostra analisi sarà articolata in modo tale da ricostruire tutti i passaggi matematici celati dall'esposizione di Mascheroni portando alla luce lo sviluppo logico dei vari problemi di cui l'autore, spesso, dà solo formulazioni conclusive. Le fasi numerate hanno lo scopo di esprimere con chiarezza il percorso.

1) Il triangolo CEB è simile a Bpb (hanno tre angoli uguali). Qiundi:
pb/Bp = CE/BE
da cui:
pb = (CE x pB)/BE

2) **Mascheroni vuole esprimere lo spostamento verticale infinitesimo Aa (del peso A) in funzione dello spostamento orizzontale infinitesimo pB del peso B**

3) Il triangolo bVR è uguale al triangolo BAF. Qiundi:
il segmento bV = BA

4) Il triangolo pbB è uguale al triangolo VnA. Quindi:
il segmento pb = Vm

5) Dai punti 3) e 4):
il segmento bV = BA =ba

6) Dai punti 3)-4)-5):
l'angolo bVa è retto

7) Il triangolo bRV è simile ai triangoli Vna e BFA. Quindi:
Vn/an = BF/AF.Quindi:
Vn = BF/(AF x an).
an = pB. Quindi:
Vn = BF/(AF x pB).

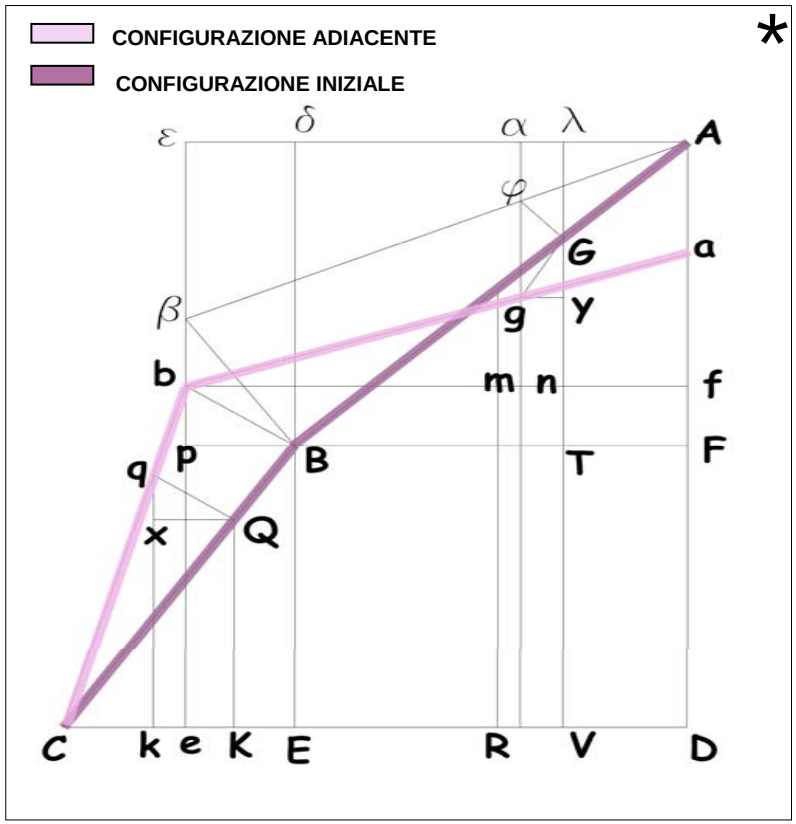
8) Lo spostamento verticale Aa = Vn - Vm.
Quindi (vedere il punto 7):
Aa = (BF/AF x pB) - Vm

9) Il segmento Vm è uguale a pb (vedere il punto 1). Quindi:
Aa = (BF/AF x pB) - (CE/BE x pB)

10) Applicando il PRINCIPIO DI LAVORI VIRTUALI *("Ragione delle Forze"):*
A x Aa : B x pb =
A x pB (BF/AF - CE/BE) : B x (pB x CE/BE)
Quindi:

CAPO I: "EQUILIBRIO DE' RETTILINEI"

Problema II



"Si supponga tutto come nel Problema precedente, se non che i pesi sieno in G e Q, trovare la ragione delle due forze".

1) Il triangolo bpB è simile a qxQ (hanno tre angoli uguali).Qiundi:
qx/ Qx = bp/bB
da cui:
qx = (pb/Bp x Qx)

2) Il triangolo CxQ è simile a CpB.
Quindi:
Qx/Cq = pB/CB.Quindi:
Qx = (pB/ CE) x CQ

3). Dal punto 1):
qx = (bp/Bb) x Qx
Qiundi:
il segmento qx = (bp/Bp) x [(pB/CE) x CQ]

4) Il triangolo BGT è simile al triangolo BAF.
Quindi:
GT/BG = AF/BA.Quindi:
GT = (AF/BA) x BG

5) **Af è uguale a AF - Aa -bp**

6) gm = af x BG/BA.
Dal punto 5):
gm = (AF - Aa - bp)/BA x BG

7) Gy = GT - gm - pb.
Da cui:
Gy = GT - [(AF x BG)/BA] + [(Aa x BG)/BA] + + [(pb x BG)/BA] - pb

8) BG/BA (Aa + bp) - bp = Gy
[dal *Problema 1* Vn = Aa + bp]
Gy =[(Aa x BG)/BA] + [(bp x GB)/BA] -bp
Quindi:
Gy = [(Vn x BG)/BA] - bp
Quindi:
Gy = [(BF x Bg x pB)/(AF x BA)] - (CE x pB)/BE
poiché Vn = (BF x pB)/AF e
pb = (CE x pB)/BE

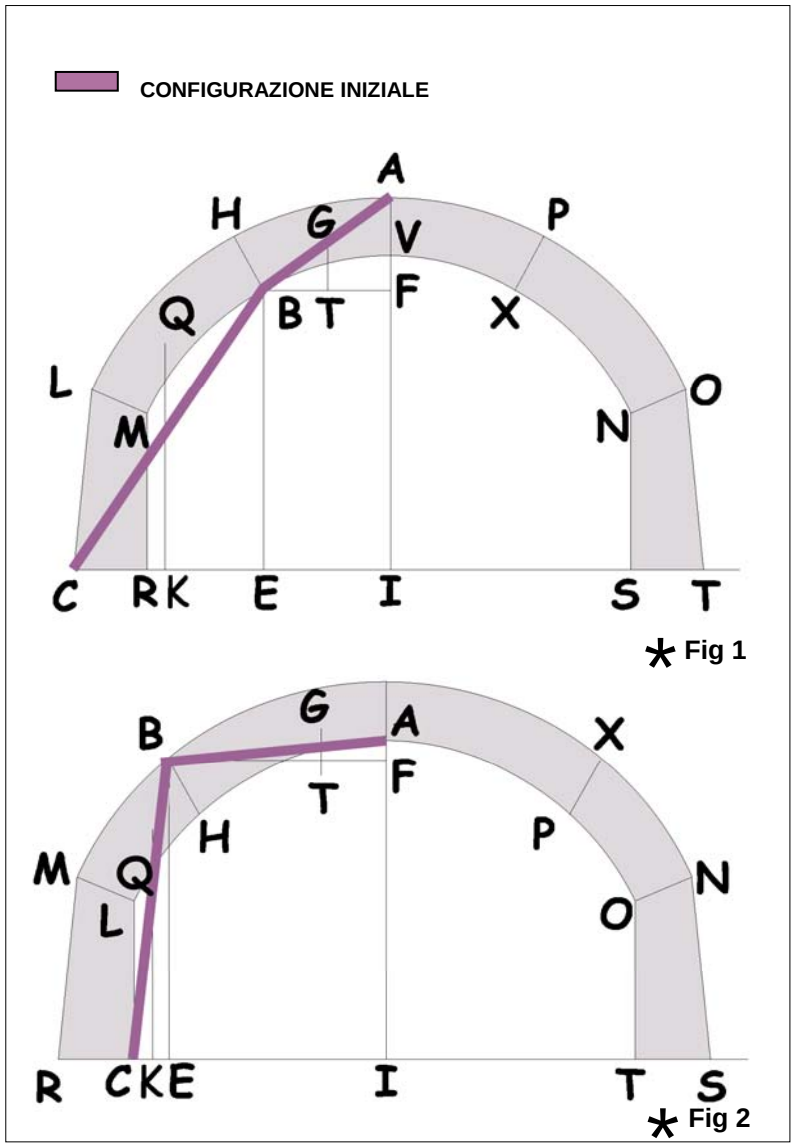
9) Dal punto 1): qx = (CQ x CE x pB)/(CB x BE)

10) Applicando il PRINCIPIO DI LAVORI VIRTUALI

G x Gy : Q x qx = G x [(BT/AF) - (CE/BE)] : Q x CK/BE

CAPO I: "EQUILIBRIO DELLE VOLTE"

Problema X



* Fig 1

* Fig 2

"Supposto che nell'arco solido LHAONVBM posto sopra le due basi LCRM, NSTO il punto A che si trova alla sommità possa discendere perpendicolarmente aprendosi l'arco in V, e lateralmente in H e P, e ascendendo i due punti B e X restando sempre congiunte in un pezzo solo le parti HBVA, AVXP eguali, e parimenti le parti HLCRMB, XPOTSN, le quali debbano alzarsi col girare intorno a' due centri G e T, seguendo il tutto come se in C, B, A, X, T, vi fossero delle cerniere; trovare la ragione delle due forze ".

(Fig 1) Dal *Problema II* la Ragione delle Forze è:

1

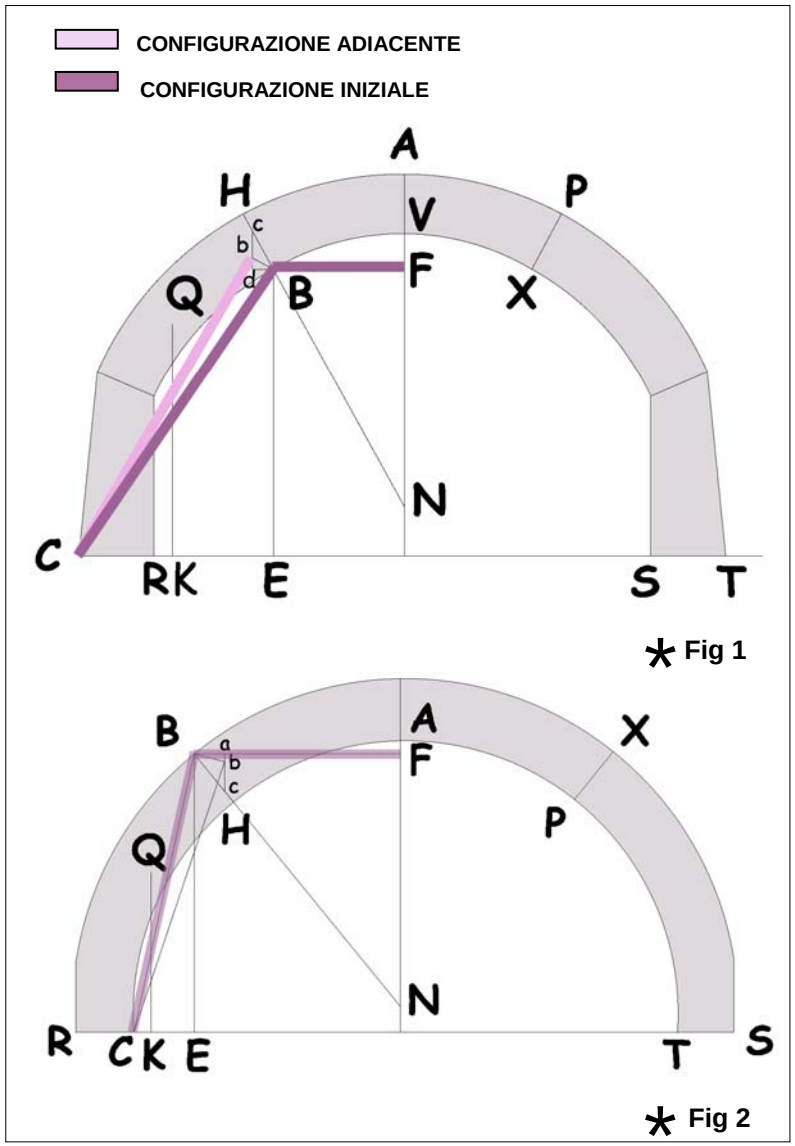
G x Gy : Q x qx = G x [(BT/AF) - (CE/BE)] : Q x CK/BE

Se si scambiano le lettere dall'intradosso all'estradosso, tale formula fornisce anche la definizione del meccanismo di COLLASSO FLESSIONALE di senso inverso, ovvero di rotazione attorno all'intradosso in chiave e attorno all'estradosso alle reni (Fig. 2).

CAPO I: "EQUILIBRIO DELLE VOLTE"

Problema XI

"Supponendo che il pezzo d'arco solido HBVXPAH discenda perpendicolarmente, e parallelamente a sé stesso, e facendo cogli sdrucciolamenti de' lati HB, PX alzare i due pezzi HCRB, PTSX giranti intorno i centri C e T; trovare la ragione delle forze contrarie".



1) Il triangolo abB è simile a BCE (hanno tre angoli uguali).Quindi:
BE:CE = Ba : ba

2) (CK x Ba)/BE = SPOSTAMENTO VERTICALE DI Q

3). **G = gb = ae - ab**

4) Il triangolo Bab è simile al triangolo BFC.
Quindi:
ab/aB : BE/CE.Quindi:
ab = (BE/CE) x Ba

5) Il triangolo Bab è simile al triangolo BFH.
Quindi:
ae : Ba = FH : BF
Quindi:
ae = (FH x Ba)/BF

6) Dal punto 3):
G = [(FH x Ba)/BF] - [(BE xBA)/CE]

7) Applicando il Principio dei Lavori Virtuali("Ragione delle forze"):

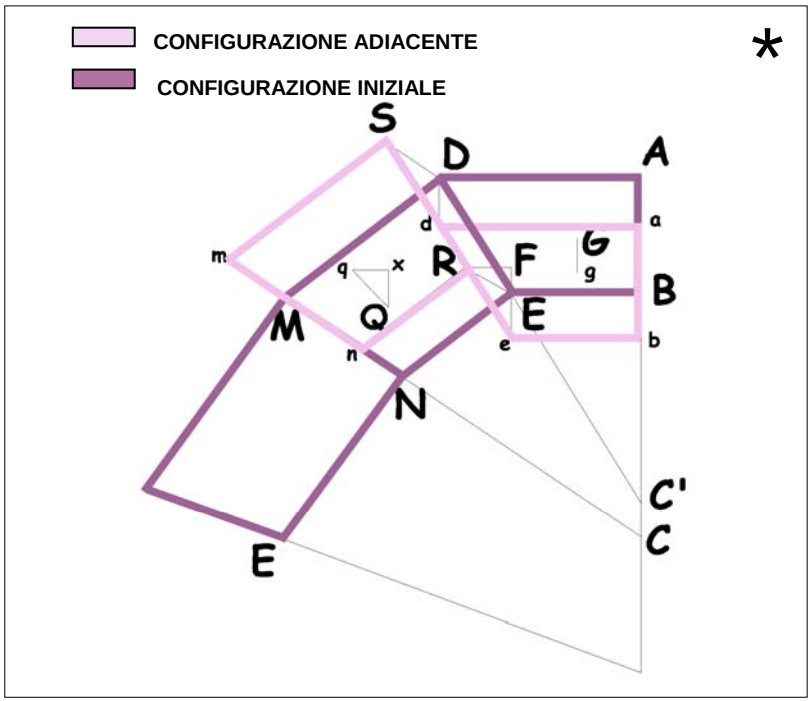
2

G x Gy : Q x qx = G x [(FN/BF) - (CE/BE)] : Q x (CK/BE)

Se si scambiano le lettere dell'intradosso all'estradosso, tale formula fornisce anche la definizione del meccanismo di COLLASSO FLESSIONALE di senso inverso, ovvero di rotazione attorno all'intradosso in chiave e attorno all'estradosso alle reni (Fig. 2).

CAPO I: "EQUILIBRIO DELLE VOLTE"

Problema XII



Il meccanismo qui indagato è quello di SOLO SCORRIMENTO, nell'ipotesi di attrito nullo ai giunti di rottura. Tale ipotesi è chiaramente irrealistica. Di questo Mascheroni è consapevole, ma è anche altrettanto convinto che:

"*non deve sembrare, che operi fuor di proposito, chi della fermezza degli archi e delle cupole si mette a trattare in una maniera quasi semplicemente teorica. Posto che un arco, o una volta di qualsivoglia genere costrutta sia in guisa, che per la sua figura, e forma attese le leggi di gravità, le varie parti delle materie, che la compongono, aver debbano fra loro equilibrio; per parte degli sfregamenti e delle malte sarà tanto più allontanato il pericolo della caduta".*

"Se il corpo ABED possa sdrucciolare secondo la direzione, e sulla linea AC perpendicolarmente, intanto che il corpo DMNE sdrucciola sulla linea MC; trovare la ragione delle due forze".

1) Il meccanismo presuppone che il concio ADEB scorra verticalmente ("*la linea DA venga in da, la EB in eb")*

2) Anche il concio DEMN scorre, ma verso l'alto*("la linea Rm sarà la linea alla quale si sarà portata la linea EN e la Sm quella alla quale si sarà portata la DM")*

3) Lo spostamento verticale del peso G è:
Gg = Ee

Lo spostamento verticale del peso Q è:
Qx = EF

4) La "Ragione delle Forze" è:

G x Ee : Q x EF = G x (FE - FE) : Q x FE

In questo caso Mascheroni non dice nulla in merito al modo opposto di collasso, ma è evidente che la precedente relazione vale anche per esso in quanto gli angoli AC'D e ACM sono gli stessi, invertendosi solo il segno dei lavori.

ANALISI DEI MECCANISMI DI ROTTURA

Dal confronto tra l' Equazione 1 e l'Equazione 2 Mascheroni definisce il tipo di collasso cui sarà soggetto l'arco in base al valore maggiore della quantità Q (CK/BE)

1 **G x Gy : Q x qx = G x [(BT/AF) - (CE/BE)] : Q x CK/BE**
Equazione che definisce il COLLASSO FLESSIONALE

2 **G x Gy : Q x qx = G x [(FN/BF) - (CE/BE)] : Q x (CK/BE)**
Equazione che definisce il COLLASSO "ALLA LA HIRE"

Se sarà:

BT/AF > FN/BF

avverrà il **COLLASSO FLESSIONALE** (nei due versi di caduta).

Se invece sarà:

BT/AF < FN/BF

avverrà il **COLLASSO " ALLA LA HIRE"** (nei due versi di caduta). Si romperà così anche se BT/AF = FN/BF *"poiché in tal caso non ci sarebbe ragione sufficiente perché i pezzi HAVB, PAVX concepissero un moto di rotazione, ed il centro G dovesse camminare orizzontalmente".*

Tale conclusione è importante e, apparentemente, di immediata applicazione. In realtà la deduzione di Mascheroni è affrettata perché *la forza Q x(CK/BE)* non è affatto la stessa per i quattro modi di collasso trattati nei vari *Problemi*: essa dipende dalle posizioni dei giunti BH e CR in corrispondenza delle quali il rapporto tra i lavori può diventare uguale all'unità, e tali posizioni, se esistono, non sono in generale le stesse nei quattro modi.

Comparato con gli studi contemporanei, l'inquadramento dei modi di collasso offerto da Mascheroni è esemplare per generalità e chiarezza metodologica. Tali risultati, seppur impliciti nel metodo dei massimi e minimi, sarebbero difficilmente riscontrabili nell'applicazione fattane da Coulomb, a riprova dell'incompletezza della sua trattazione.
Da questo punto di vista è un peccato che l'esempio di Mascheroni non abbia avuto seguito.

LA ‘TEORIA GENERALE SULLE MURATURE’:
[“VINCENZO AMICI”]

SUL PROBLEMA

DELL' EQUILIBRIO DELLE VOLTE

MEMORIA

DEL SIGNOR

DOTTORE VINCENZO AMICI

CORONATA

DALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

MODENA

NELLA TIPOGRAFIA CAMERALE

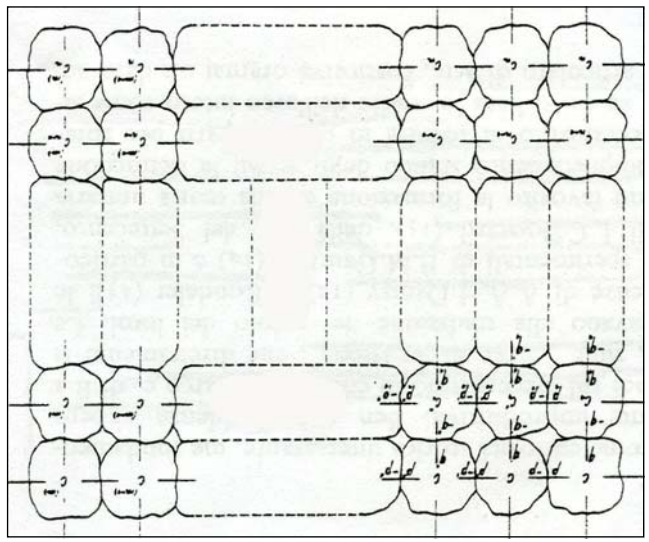
1833.

PRIMI ABBOZZI DI UNA "TEORIA GENERALE"

La figura di **VINCENZO AMICI** viene a colmare l'assoluta mancanza, da parte degli studi settecenteschi, di una teoria tesa a definire il problema delle murature in termini generali (oggi attualissima) senza riferimento a specifiche formule strutturali, in modo da poter trarre da un medesimo nucleo di equazioni gli strumenti necessari per affrontare "deduttivamente" i diversi casi particolari. La sua memoria fu premiata nel 1831 dalla Società italiana delle Scienze, Accademia che aveva indetto un concorso, nel 1829, riguardo il problema dell'equilibrio delle volte. Amici fu l'unico a presentarsi alla scadenza, ed il suo lavoro fu ritenuto degno di vittoria. Il suo lungo lavoro riguardò, in primo luogo, la fissazione delle equazioni più generali che debbono valere per una qualunque *"grotta composta di sassi di forme regolari o irregolari animati da un numero qualunque di forze, ciascuno de' quali sia in contatto almeno in quattro punti con i quattro sassi che lo circondano*", affinchè sia garantito l'equilibrio di tutto il sistema. Il risultato furono tre equazioni di equilibrio rispetto al "*moto progressivo"* valide per ogni "*macigno o cuneo*" e di tre equazioni di equilibrio globale, trattando a parte il "*moto di rotazione*". Nonostante il parere negativo di Poncelet, perché riteneva l'autore troppo legato non alle applicazioni pratiche di meccanica, il ragionamento di Amici è interessante, nonostante evidenti difficoltà a definire equazioni non lineari nelle quali il segno dei termini connesso all'attrito dipende dalla soluzione, oltre al fatto di non aver tenuto conto del segno che deve essere imposto alla pressione fra i giunti o al non completamento della discussione sulle condizioni di compatibilità che devono essere associate al sistema delle equazioni alle differenze nelle pressioni.

Nonostante alcuni limiti, il contributo di Vincenzo Amici ha riguardato comunque una svolta rispetto alle teorie settecentesche più frammentarie, contribuendo a definire una formulazione più unitaria e generale, rinnovando indubbiamente le analisi condotte precedentemente.

Modello meccanico studiato da Amici nel 1883, per definire una teoria generale delle murature



RICERCA SULLE CURVE DI PRESSIONE:

“CELESTE CLERICETTI”

LA CERNIERA

ED IL PRINCIPIO DEI PUNTI DI EGUAL PRESSIONE

NELLE VOLTE

MEMORIA

DELL' ING. C. CLERICETTI

Professore ordinario di Costruzioni civili presso il R. Istituto tecnico superiore di Milano

PREMIATA

dal R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

Con sei tavole e 44 figure intercalate nel testo

TIPOG. E PREM. LITOG. DEGLI INGEGNERI

—

1876

PRINCIPI SULLA DETERMINAZIONE DELLA "VERA CURVA DI PRESSIONE"

Gli studi dell'ing. CELESTE CLERICETTI si collocano in un momento storico della ricerca in cui l'attenzione è rivolta alla definizione di un principio che possa eliminare l'indeterminatezza della condizione statica dell'arco, ovvero che possa individuare con certezza la "vera" curva delle pressioni. Il primo tentativo di soluzione fu fatto da **DROUETS** che formulò un principio generale detto "della massima stabilità" (1865). Secondo questo principio **"*la natura non sviluppa forze molecolari di resistenza se non nei limiti strettamente necessari a fare equilibrio alle forze esterne agenti sulle molecole: se, dunque, un sistema di resistenze è tale che i massimi valori di esse sono minori dei valori massimi di un altro sistema ugualmente in equilibrio, è il primo che si realizzerà nelle condizioni del problema, perché ogni altro richiederebbe, da parte delle forze di resistenza, sforzi superiori e per conseguenza inutili*"**.

Il principio di Drouets fu severamente criticato da J. DUPUIT che ne evidenziò la gratuità con un semplice controesempio tratto appunto da tale problema parallelo che in quel lasso di tempo stava trovando rigorosa sistemazione mediante la rimozione dell'ipotesi di rigidità e l'introduzione del concetto di sistema elastico: "*consideriamo una trave del peso di 600 kg, che riposi su tre appoggi equidistanti e proponiamoci di conoscere le pressioni in ciascuno di essi. La statica elementare considera il problema come indeterminato […] ma se si adotta il principio di Drouets, si dirà che la pressione su qualsiasi appoggio deve essere 200 kg, giacchè qualsiasi altra ripartizione della pressione totale esigerebbe, da parte delle "forze resistenti", sforzi superiori e perciò inutili. Ora ciascuno sa che, tenendo conto dell'elasticità della trave, e dei punti di appoggio, non è quella la soluzione che si realizza*".

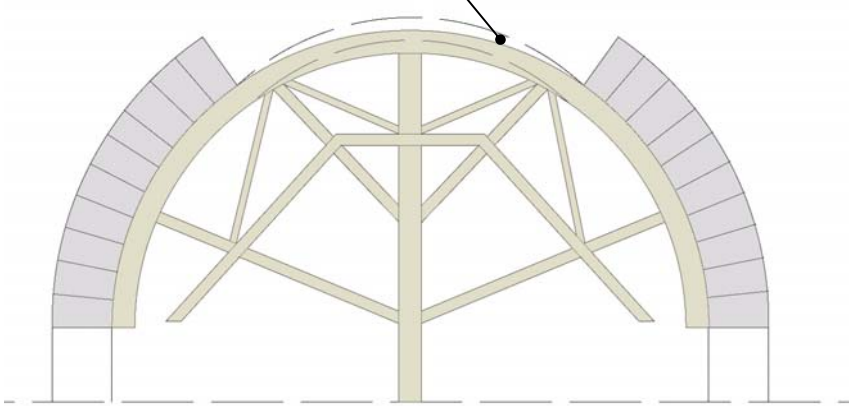
La critica di Dupuit è senz'altro corretta, ma invece di fornire una risposta in analogia col problema degli appoggi, propose un metodo che faceva ancora riferimento al modello rigido. Prendendo spunto dalla considerazione delle deformazioni subite da un arco all'atto del disarmo, egli sostenne il principio secondo cui una volta, tolta la centina, ruota intorno ad un determinato punto sull'intradosso (PRINCIPIO DEI PUNTI CERNIERA). Tale principio, ripreso interamente da **CLERICETTI**, fu dallo stesso ampliato intervenendo sulla considerazione della comprimibilità delle malte, formulando il PRINCIPIO DEI PUNTI DI EGUALE PRESSIONE che determina uno spostamento della curva di pressione trovata dal Dupuit.

I “PUNTI CERNIERA”

Il principio dei “Punti Cerniera” si basa sulla considerazione che in una volta simmetrica la curva delle pressioni di una delle semivolte non ha due punti indeterminati, ma passerà certamente per un punto nell’intradosso. Tale punto sarà quello attorno al quale ruoterà la volta nel momento del disarmo, quindi si comporterà come una cerniera.

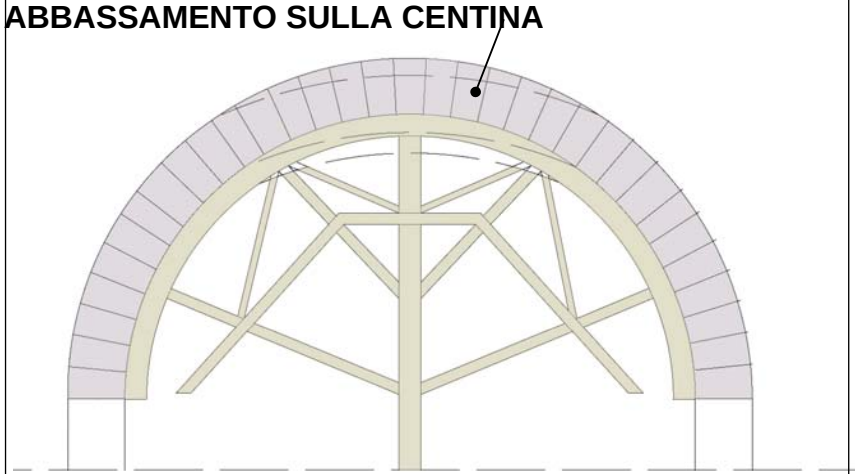
<u>Considerazioni sul disarmo</u>:

INNALZAMENTO DELLA CENTINA



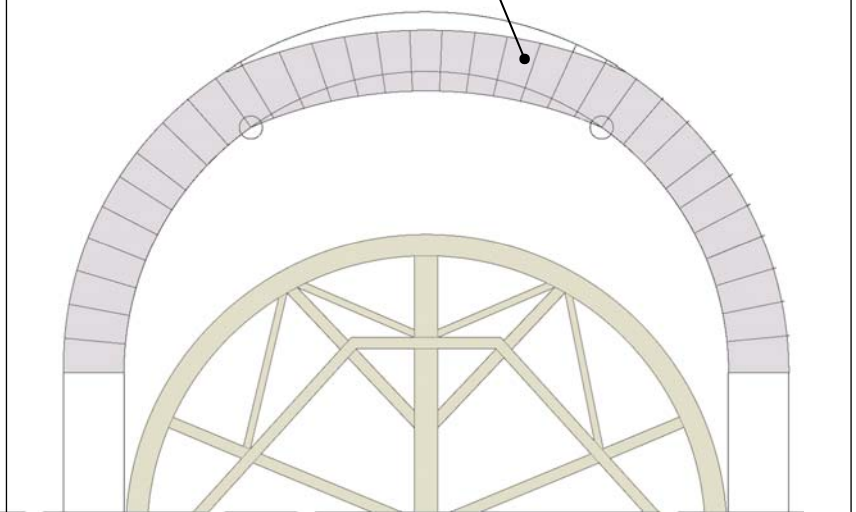
Nella costruzione di una volta, quando la muratura è pervenuta all’altezza delle reni, essa comincia ad appoggiarsi sulle centine e queste tendono a sollevarsi al vertice: è necessario opporsi energicamente a questo effetto, ed il mezzo più semplice consiste nel disporre sulla parte superiore delle centine una parte dei materiali destinati alla sua costruzione

ABBASSAMENTO SULLA CENTINA



Quando la muratura si eleva alla chiave si producono effetti inversi; le centine nell’insieme sono compresse, il vertice si abbassa e le parti laterali tendono a respingere la muratura delle parti inferiori. Risulta da questi diversi movimenti che nel momento in cui la volta si chiude, il vertice della centina si abbassa: è questo l’ABBASSAMENTO SULLA CENTINA dovuto alla flessibilità della stessa.

ABBASSAMENTO DELLA VOLTA

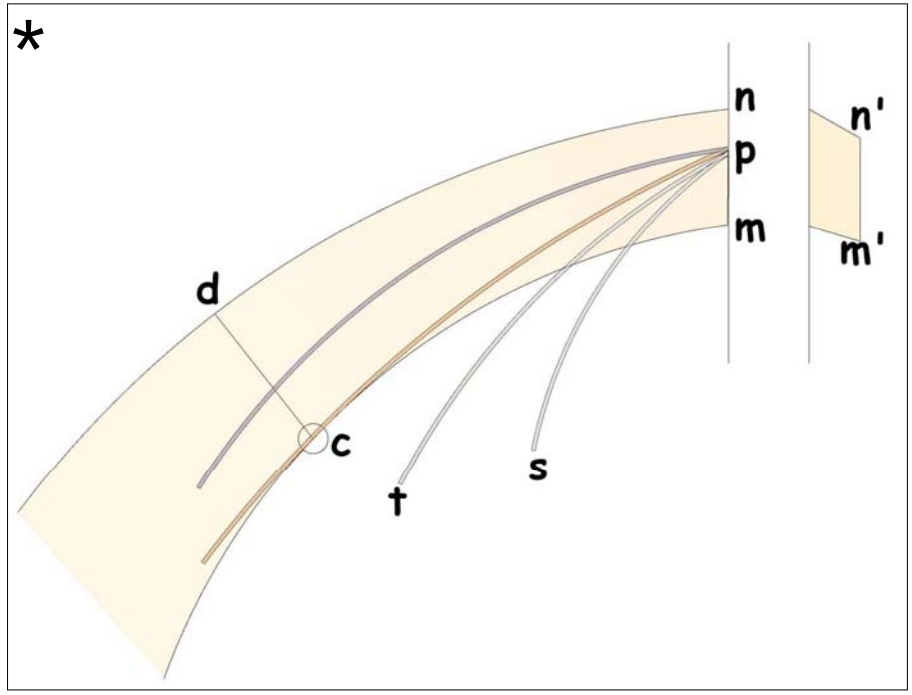


Nel momento del disarmo le pressioni che si sviluppano nella muratura comprimono la malta, soprattutto nelle parti in cui si hanno gli sforzi più grandi: l’ampiezza dell’arco diminuisce, la curva delle pressioni si sposta e il vertice della volta si abbassa di nuovo. Questo secondo abbassamento è quello che propriamente viene detto l’ABBASSAMENTO DELLA VOLTA.

DISARMO E CURVA DI PRESSIONE

La suddetta dinamica del disarmo, per Clericetti - e già per Dupuit - deve essere oggetto di studio da parte dei teorici perché possiamo trarne un' importante indicazione: se le due semivolte in chiave si abbassano esse ruoteranno attorno al punto che fa da cerniera, e per quel punto passerà certamente la curva delle pressioni.
Esponiamo ora in maniera sintetica il principio di Clericetti (PRINCIPIO DEI PUNTI DI UGUAL PRESSIONE) che riprende quasi integralmente quello dei punti cerniera di Dupuit (PRINCIPIO DEI PUNTI CERNIERA) ma vi aggiunge delle ulteriori considerazioni su quella che egli ritiene sia la vera curva dell'arco.

Nella sua trattazione Clericetti dice di considerare una semivolta (vedi figura): nel primo istante in cui la centina si abbassa, tale porzione di arco, sotto l'azione del proprio peso, tende a comprimere in maniera crescente la parte di semivolta ad essa simmetrica. In tale dinamica si dice che l'arco "entra in funzione" e la spinta in chiave, precedentemente nulla, comincia ad aumentare di valore determinando un continuo spostamento della curva delle pressioni. Supponendo infatti che la spinta passi per il punto **p** della chiave, la curva passerà per le



configurazioni **ps** e **pt** che corrispondono a curve insufficienti all'equilibrio (in quanto fuori dal profilo dell'arco) fino ad arrivare alla configurazione **pc** tangente al punto ***c*** dell'intradosso attorno al quale, nello spostamento della curva, ruoterà la semivolta (è quindi il "punto cerniera").
Per tale curva la spinta in chiave avrà acquistato il valore sufficiente all'equilibrio che sarà il minimo strettamente necessario alla resistenza secondo il principio di Moseley. Infatti, a qualsiasi altra curva al di sopra del punto **c**, corrisponderà un valore della spinta in chiave superiore a quello relativo alla configurazione **pc** della curva delle pressioni.

La suddetta curva **pc** passante per la chiave e per il "punto cerniera" all'intradosso, rappresenta sicuramente uno stato di equilibrio per il quale passerà la curva delle pressioni anche se, e lo vedremo più avanti, Clericetti discuterà molto sul fatto che questa possa essere la vera curva delle pressioni.

Per determinare tale curva è sufficiente determinare: il "giunto di cerniera" e la posizione del punto di applicazione in chiave.

• DETERMINAZIONE DEL "GIUNTO DI CERNIERA"

La determinazione del punto cerniera fu attuata in considerazione del fatto che la rotazione deve avvenire più facilmente laddove, per opporvisi, occorre uno sforzo maggiore, ossia **in corrispondenza del massimo valore della spinta**. Ciò non contraddice il fatto che la spinta utile all'equilibrio sia un minimo, il quale deve intendersi rispetto ai valori che la spinta può assumere quando è già nota la cerniera. Tale giunto è a priori:

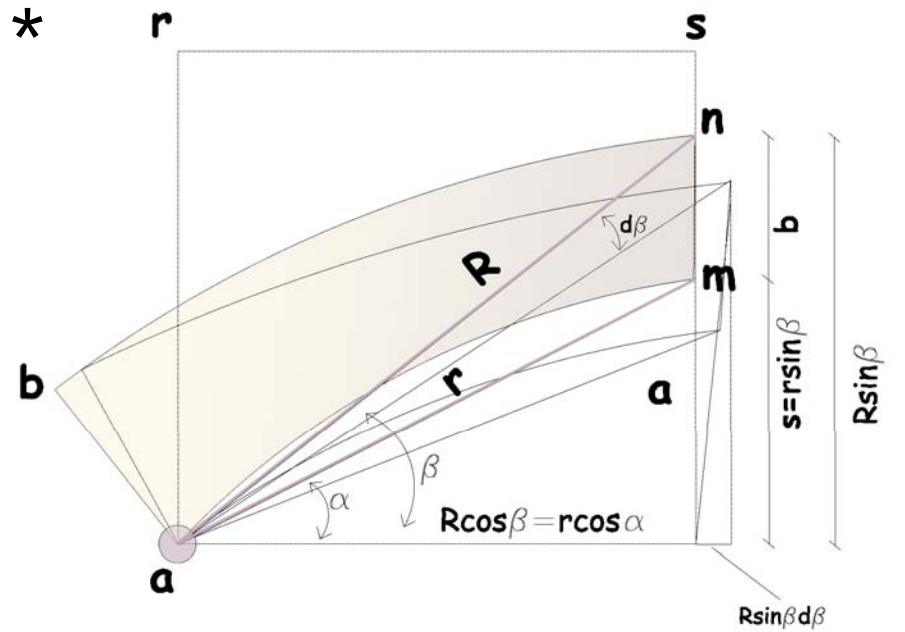
• **incognito**,nelle***"VOLTE COMPLETE"*** (a tutto sesto)

•**conosciuto** (è il giunto d'imposta) nelle **VOLTE RIBASSATE**.

Per l'individuazione del giunto incognito nelle volte complete, Clericetti propone un metodo grafico (che per brevità d'esposizione non riporteremo) ripreso

• DETERMINAZIONE DEL PUNTO DI APPLICAZIONE IN CHIAVE

Il metodo proposto trova la sua ragione nella proporzionalità della compressione dei punti al giunto in chiave con i loro spostamenti, a seguito della rotazione attorno al punto cerniera.



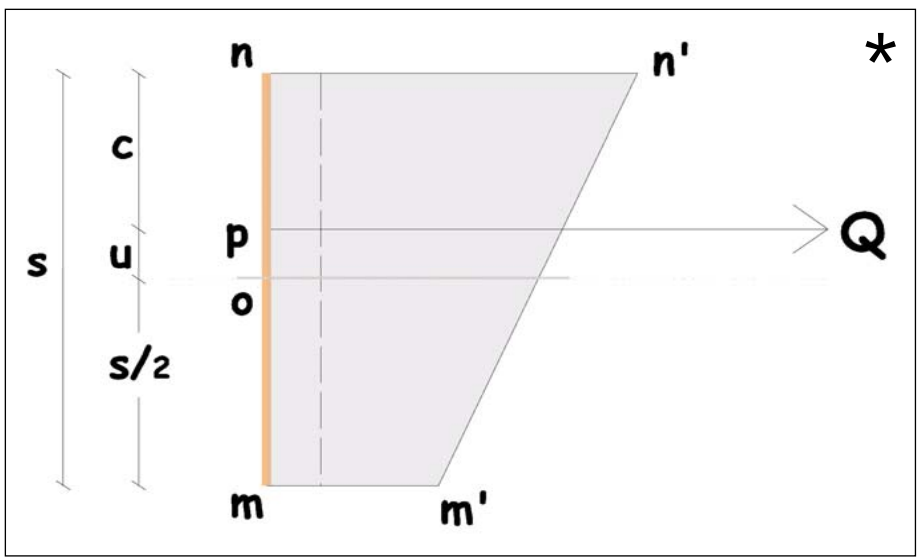
"Consideriamo una volta ribassata abnm (vedi figura) *per la quale il giunto di rottura sarà l'imposta ab, e siano*

an =R, am=r, ang oam = a, ang oan =b, om =b e mn =s . Nella rotazione della volta attorno ad a gli angoli a e b diminuirebbero di una quantità eguale se la semivolta non incontrasse ostacolo. Ma in questo caso, essendo l'effetto dell'ostacolo quello di mantenere mn sulla verticale, se ne segue che :

LA COMPRESSIONE ORIZZONTALE IN CIASCUN PUNTO DELLA CHIAVE È PROPORZIONALE ALLA DIMINUIZIONE DELLE PROIEZIONI ORIZZONTALI DEI RAGGI CONDOTTI DA A, PER CIASCUNO DEI PUNTI DELLA CHIAVE.."

"La proiezione orizzontale del raggio R è R cosb; se b scema di db, la proiezione aumenterà di R senbdb.
Ma ***R senbdb = b+s*** *, dunque la compressione in a è proporzionale a (b+s)db.*
Nel punto m la pressione sarebbe evidentemente, dietro un calcolo analogo, proporzionale a bda,
DUNQUE LE COMPRESSIONI IN n ed m STANNO FRA LORO COME (b+s) STA A b E PERCIÒ IL CENTRO DI PRESSIONE NON SARÀ NEL MEZZO DI mn MA PIÙ PROSSIMO A n CHE A m".

Definita geometricamente la relazione che lega i valori delle tensioni di compressione dei punti in chiave con la "possibilità" degli stessi di ruotare, essa si confronta con la relazione che definisce l'intensità delle tensioni agenti su una sezione interamente compressa.



"Ora è noto che se lo sforzo Q, *agente su una faccia* mn=s (vedi figura) *è applicato in un punto* p *alla distanza* po=u *dal mezzo, tale che siavi pressione tanto in n quanto in m e per tale effetto, basta che sia*

u< 1/6

Lo sforzo massimo **nn_1 = R**
e lo sforzo minimo **mm_1' = r**
sono forniti rispettivamente dalle:

R = Q/s [1+ (6u/s)]
r = Q/s [1- (6u/s)]

Ponendo np = c, *la distanza dal centro di pressione all'estradosso del giunto sarà:*

u = (S/2)-c

Con tali sostituzioni si ha:

R/r = (2s - c)/(3c-s)

Sostituendo in questa R/r *da* [/b+s)/b]:

(b+s)/b = (2s - 3c)/(3c - s)
[(b+s)/b](3c - s) = 2s - 3c
(3bc - bs +3sc - s)/b = 2s - 3c
3bc - bs + 3sc - s = 2bs - 3bc
6bc - bs - 3sc - s = 2bs
3c (2b - s) - bs - s - 2bs = 0
c = (3bs + s)/[3 (2b - s)]

c = s(3b + s)/3 (b - s) ***per b diverso da zero:***
1/2s < c < 1/3s

Si ottiene così la formula che determina la distanza **c** del punto d'applicazione della spinta orizzontale dal lembo d'estradosso, nella configurazione della curva delle pressioni passante per il "punto cerniera".

LA CURVA DI “EQUILIBRIO DEFINITIVO”

La curva delle pressioni determinata attraverso il metodo suddetto è per Dupuit la vera curva delle pressioni, che rimarrà tale in condizioni di esercizio, a parte l’ammissione di un certo piccolo spostamento della curva al di sopra del punto cerniera dovuto al riconoscimento dell’impossibilità di far passare tutta la pressione per un punto. Clericetti, che accetta quasi completamente la trattazione del Dupuit sulla curva dei punti cerniera (riconosce infatti che essa è sicuramente la configurazione della curva delle pressioni che avviene al disarmo) non ritiene che questa possa essere la curva di equilibrio definitiva; scrive infatti:

> ***“Quando la spinta ha acquistato quella intensità che assicura l’equilibrio dell’insieme, non può aumentare, e sarà la vera spinta della volta. Allora la pressione totale in ciascun giunto avrà acquistato un valore definitivo, che non può né crescere né scemare. In tale istante la curva delle pressioni è tangente all’intradosso”.***

Ma aggiunge:

> ***A questo punto l’importanza della quistione sta nel determinare se tale posizione della curva rappresenti altresì l’equilibrio definitivo della volta e se il fatto della cerniera è transitorio o definitivo”.***

Secondo Clericetti, oltre alle deformazioni “esterne” dell’arco al termine delle quali la curva passa per i punti cerniera, esistono delle successive deformazioni interne dovute alla comprimibilità delle malte dei giunti che determinano uno spostamento della curva delle pressioni.

Il modello della curva dei “punti cerniera” come curva definitiva, ammette Clericetti, può essere valido nel caso di materiale *incompressibile,* ma non è più valido per la realtà degli archi in muratura:

> ***“dei cunei di ferro o di ghisa, darebbero presso a poco tale risultato, ma la pietra e sopratutto il cemento cederanno, si formerà una superficie di contatto” .***

L’analisi di Clericetti sarà quindi incentrata nel definire quanto le deformazioni dovute alla comprimibilità delle malte possano far spostare la curva dei punti cerniera e quindi che nuova configurazione assuma la vera curva delle pressioni.

Effetto della comprimibilità delle malte

La trattazione di Clericetti in questo momento dell'analisi si basa sul logico effetto che le deformazioni interne dei giunti compressi dell'arco hanno sulla conformazione della curva delle pressioni.

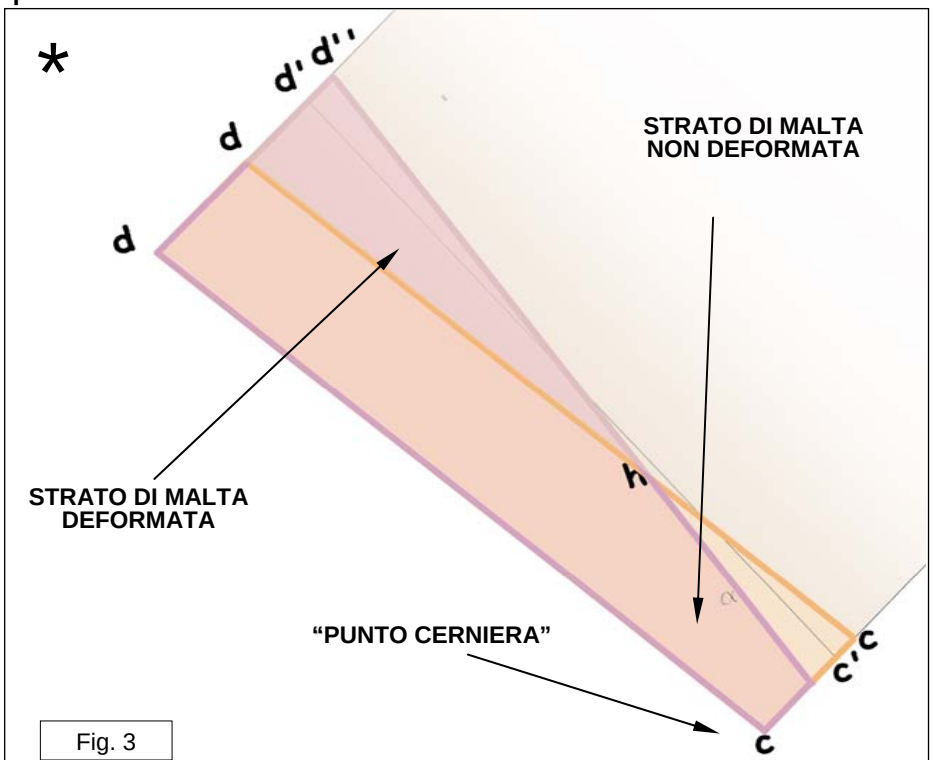


Fig. 3

"Se la curva pc è la vera curva delle pressioni dopo il disarmo, avviene nel punto c un costipamento dello strato di malta ccdd (Fig.3) ***ed altrettanto nei giunti superiori prossimi, pei quali il punto cerniera si trasforma in una piccola superficie, che va mano mano estendendosi col propagarsi della pressione a punti più lontani dall'intradosso. Abbassandosi il punto c, il giunto subisce una rotazione per la quale assumerà successivamente varie posizioni come c'd' per arrestarsi in una definitiva".***

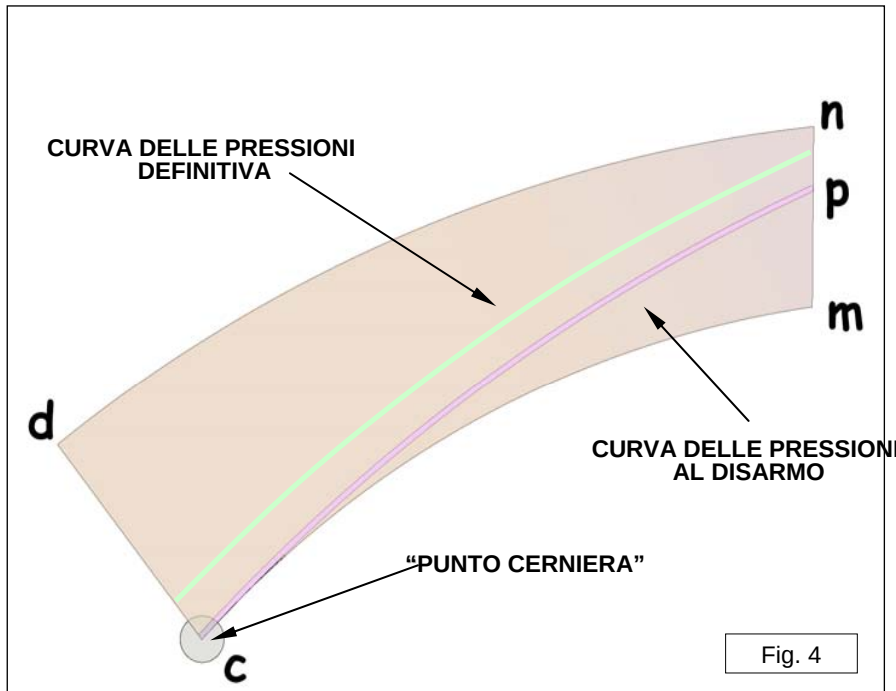


Fig. 4

"In conseguenza di tale movimento, pel quale il giunto si apre all'estradosso più o meno, avviene un contemporaneo cedimento alla chiave, che ha per effetto di aumentare gradatamente la pressione all'estradosso, cioè in n (Fig. 4) ***ossia di trasportare il punto p all'insù".***

A questo punto dell'analisi, Clericetti comincia a delineare il percorso che definisce la posizione della "vera curva delle pressioni":

"Siccome la spinta corrispondente alla curva pc è la vera e non può né aumentare né diminuire, è evidente che QUALUNQUE SIASI LA POSIZIONE DEFINITIVA p'c' DELLA CURVA DI PRESSIONE, ESSA <u>DOVRA' RISULTARE PARALLELA ALLA POSIZIONE INIZIALE pc</u> (Fig. 4).

LA CURVA DEI "PUNTI DI UGUAL PRESSIONE"

Definita la posizione della curva di equilibrio definitivo, che si trasporta superiormente facendo diminuire la pressione nel "punto cerniera" e facendola aumentare nel punto di applicazione della spinta in chiave, Clericetti passa a definire quanto sia lo spostamento verticale di tale curva definendone finalmente la sua configurazione reale:

> ***"dunque nel movimento descritto, la curva di pressione si trasporta verticalmente all'insù nella volta […].***
> ***Ma dove s'arresterà definitivamente la curva e fino a quando la pressione unitaria in c*** ("punto cerniera" al disarmo) ***andrà scemando od aumentando in n?".***

Confortato dalle osservazione sperimentali fatte durante la costruzione di alcuni ponti ad arco in muratura (sull'Olona e sul torrente Fegana), in merito alla veridicità di quanto egli afferma sulla vera curva delle pressioni al disarmo, Clericetti usa ancora la sperimentazione diretta osservando il comportamento di un modello di arco con un certo grado di elasticità. Egli nota che le fratture in chiave e alle reni avvengono, pur se con diverse estensioni, contemporaneamente. Da questo egli desume alcune considerazioni sulle pressioni agenti nei punti di rottura: egli dirà che devono essere necessariamente uguali al collasso ed estende il principio allo stato di esercizio.

> ***"Nell'istante della rovina, la massima pressione unitaria sarà eguale in tre punti: se dunque in due differenti stati la volta presenta il medesimo sforzo massimo unitario in tre punti, non potremo ammettere che in qualunque altro stato intermedio si verifichi il medesimo fatto?"***

Con tale quesito egli apre la spiegazione a conferma delle sue ipotesi:

> ***"I cedimenti di una volta sottoposta a un progressivo caricamento, devono pur essere progressivi e continui in tutti i punti, e quindi anche in quelli di rottura. Se quindi la pressione massima unitaria è uguale nell'istante della rovina, lo sarà anche nello stato anteriore. Che se anche la pressione non fosse identicamente la stessa, dovrebbe essere di poco diversa, infatti supponiamo che in c sia maggiore che in n*** (Fig. 4)***: se quando in c raggiunge il limite della resistenza, la pressione in n fosse molto inferiore, poiché la volta deve rovinare, la pressione in n dovrà crescere bruscamente e balzare dal valore che aveva prima a quello dello schiacciamento. Ma ciò è contrario ad ogni ipotesi ragionevole.***

Egli può finalmente concludere che:

" LA POSIZIONE DEFINITIVA DELLA CURVA DI PRESSIONE È QUELLA PER LA QUALE LA PRESSIONE UNITARIA ALL'ESTREMO DEI DUE PUNTI DI ROTTURA HA LA STESSA INTENSITÀ

“PUNTI DI UGUAL PRESSIONE” E STABILITA’ DELLA VOLTA”.

La conclusione di Clericetti, che presuppone evidentemente la compressibilità dei materiali e la loro omogeneità in corrispondenza dei giunti di rottura (*se l’arco fosse di mattoni, ma la chiave per esempio di granito, la condizione esposta non potrebbe verificarsi*) è giustificata dalla considerazione che la curva così ottenuta (curva dei punti di eguale pressione) corrisponde necessariamente alla configurazione di **MASSIMA RESISTENZA** delle volte. Egli afferma infatti:

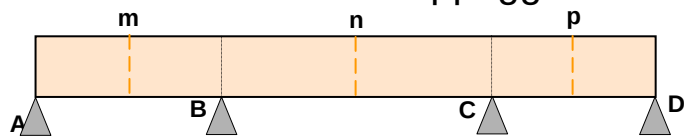
> ***“Fra tutte le posizioni che può assumere la curva pc*** (Fig. 4) ***nel suo movimento verticale, quella per la quale la pressione in n è uguale a quella in c, corrisponde alla massima resistenza della volta, compatibilmente colla curva stessa.”***

Per spiegare questo enunciato fa poi un breve esempio:

> ***“sia R la pressione unitaria in c*** (Fig 4) ***ed R^1quella in n e supponiamo R >R^1 e il caricamento della volta sia tale che R sia prossimo al limite di resistenza. Se diamo un piccolo aumento al sovraccarico, il limite di resistenza sarà raggiunto prima***

> ***“Ma se R = R^1 potremo far subire alla volta un altro aumento, e sarà il massimo possibile, perché qualsiasi ulteriore incremento rende la rovina inevitabile”.***

A tal proposito egli ritiene che un fatto analogo si verifica in una trave elastica appoggiata in 4 punti:



E’ noto che la trave così disposta, a sezione costante, presenta la massima resistenza quando il rapporto tra le due travate AB e BC è tale che la rottura possa essere contemporanea nei punti n,m,p, e quindi quando in tali punti si presenta il medesimo valore della pressione.

Il metodo proposto da Clericetti, ricordato sempre assieme a quello del Dupuit, è stato spesso contestato per la sua natura che si fonda su “errori di costruzione”. Le osservazioni fatte sui ponti ad arco da lui studiati (sull’Olona e sul Fegana) sono state considerate poi vane in quanto le deformazioni avvenute durante il disarmo dipendono da difetti nel tipo di centine troppo flessibili e costruite senza quegli accorgimenti che impediscono la rotazione delle volte al momento del disarmo.

RICERCA DELLE ‘AREE DI STABILITA’:

“GIOVANNI SALEMI PACE”

SULL' EQUILIBRIO

DELLE

VOLTE SIMMETRICHE

SIMMETRICAMENTE SOPRACCARICATE

TEOREMI

DEL PROF.

GIOVANNI SALEMI PACE

PALERMO
STABILIMENTO TIPOGRAFICO LAO
via Celso, 31.
—
1879

SALEMI PACE E GLI STUDI SULLA STABILITA' DELLE VOLTE

L'analisi condotta da Giovanni Salemi Pace nel 1879, articolata in tre teoremi, offre un nuovo procedimento di determinazione della curva delle pressioni.
Egli richiamandosi alle ricerche settecentesche, dimostrò che la curva delle pressioni, in una volta simmetrica simmetricamente caricata, non è indeterminata.
Discostandosi totalmente dalle teorie dei "punti cerniera" di Dupuit e dei "punti di uguale pressione" di Clericetti (che a suo avviso sono 'costruiti' su un *"difetto di costruzione")* egli propose un metodo che parte dall'osservazione delle esperienze di Boistard per dedurne alcune logiche conclusioni.
Nel teorema 1 pone l'attenzione nel definire la natura dei centri di pressione sui giunti di rottura, che ritiene si debbano spostare contemporaneamente e necessariamente lungo i *letti in cui l'arco tende ad aprirsi* per consentire le dinamiche che si verificano nell'arco (sono *punti coniugati*).
Nel teorema II definisce la relazione univoca del valore della spinta in chiave con le coppie dei punti coniugati, costruendo un modello grafico di facile e diretta comprensione.
Il teorema III sottolinea la possibilità di definire in maniera certa la linea della pressioni che passa in un arco come logica conseguenza dei teoremi I e II.
La sua ingegnosa soluzione, ancora affetta dall'ingannevole fiducia che i soli mezzi della statica del corpo rigido siano sufficienti ad individuare la vera curva delle pressioni, venne formulata quando già da alcuni anni il problema aveva trovato nell'impostazione elastica lo strumento riconosciuto per superarne il carattere indeterminato.

Considerazioni sulle "ESPERIENZE DI BOISTARD"

Punto di partenza dell'analisi di Giovanni Salemi Pace è l'osservazione delle cosiddette "esperienze" che lo studioso francese Boistard, nel 1796, condusse su prototipi di arco riassumendone i risultati più importanti:

1) generalmente le volte si rompono per "COLLASSO FLESSIONALE"
(si rompe cioè in quattro parti, ciascuna delle quali può essere considerata come una leva che ruota attorno alle parti adiacenti);

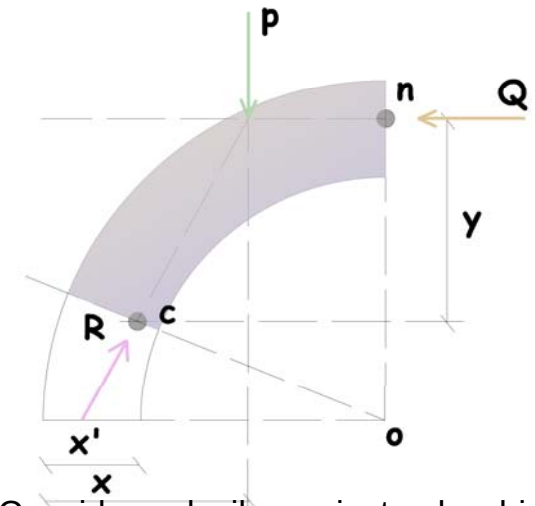
2) le volte a "tutto sesto" tendono a rompersi per collasso flessionale nel senso di caduta verso il basso
(avviene cioè la rotazione delle porzioni di arco attorno a dei punti:

- In chiave all'estradosso
- alle reni all'intradosso
- alle "nascite" all'estradosso).

Su questi due punti egli incentrerà la sua analisi che fa riferimento al caso più facilmente verificabile nella realtà, ovvero quello di volte simmetriche e simmetricamente sovraccaricate che si rompono per collasso flessionale la cui causa è in entrambi i versi di rottura la *"differenza tra il momento della parte superiore e quello della parte inferiore".*

EQUILIBRIO DELLE VOLTE

Considerata una semivolta, siano n, c ed m i punti per cui passa la curva delle pressioni:



Q= spinta in chiave

y= ordinata del centro di pressione sul giunto di rottura alle reni

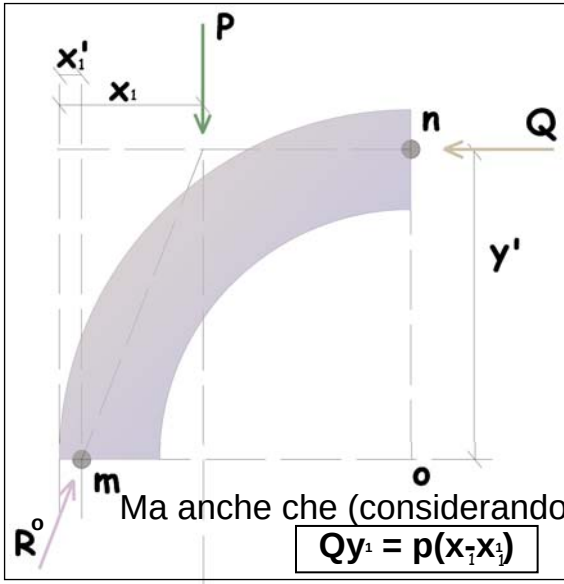
p= peso della porzione superiore di volta

x^1=ascissa del centro di pressione sul giunto di rottura alle reni

x= ascissa del centro di gravità di p

Considerando il concio tra la chiave e il giunto di rottura alle reni, deve essere verificato che :

$$Qy = p(x-x^1) \qquad (1)$$



Q= spinta in chiave (come nella 1)

(y^1,x_1)= coordinate del centro di pressione nel letto di nascita

x^1_1= ascissa del centro di gravità P

P= peso della semivolta

Ma anche che (considerando l'intera semivolta):

$$Qy^1 = p(x-x^1_1) \qquad (2)$$

TEOREMA I

"In una volta simmetrica in equilibrio, i centri di pressione nei giunti in cui la volta tende ad aprirsi, sono punti coniugati; tali che non può ammettersi una variazione della spinta orizzontale in chiave, senza non ammettere uno spostamento simultaneo di questi punti, e viceversa".

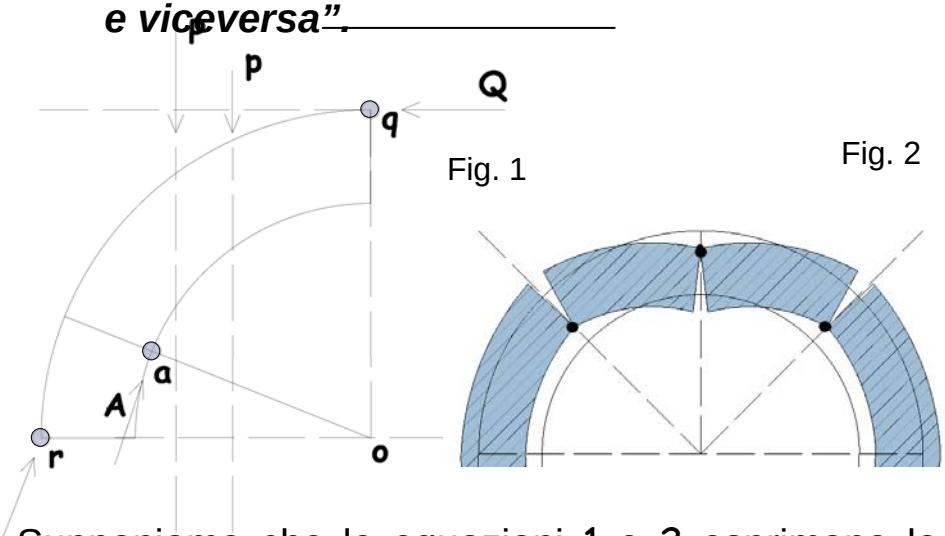


Fig. 1

Fig. 2

Supponiamo che le equazioni 1 e 2 esprimano lo stato di equilibrio limite al collasso flessionale (fig.2) ovvero,come afferma Salemi Pace, ***"l'equilibrio in cui le parti superiori siano quasi per vincere le parti inferiori".*** È noto che in tale stato la curva delle pressioni passa per i punti **q** all'estradosso in chiave, **a** all'intradosso nel giunto di rottura alle reni, ed **r** all'estradosso "alle nascite" (Fig. 1).

Da questo stato :

1 **Se si fanno aumentare *"le forze della parte superiore"***

CROLLO INEVITABILE

2 **Se si fanno aumentare gradualmente *"le forze della parte inferiore"***

La linea delle pressioni si sposterà passando per le configurazioni **a**-**b**-**c**

a La volta è al limite del collasso per rotazione del concio in chiave attorno all'estradosso.E' completamente deformata

b La volta si riassesta, le deformazioni spariscono.E' questa la configurazione di massima stabilità

c La volta è al limite del collasso per rotazione nel senso inverso a quello della configurazione a. Allo stesso modo è totalmente deformata.

E' evidente che ad ogni spostamento del punto di applicazione in chiave corrisponde uno spostamento anche lungo il punto di rottura del giunto alle reni. In questo senso i centri di pressione sono punti coniugati.

Corollario al TEOREMA I

Data una volta possono verificarsi due casi: che si trovi in uno stato

di **EQUILIBRIO** o

di **NON EQUILIBRIO.**

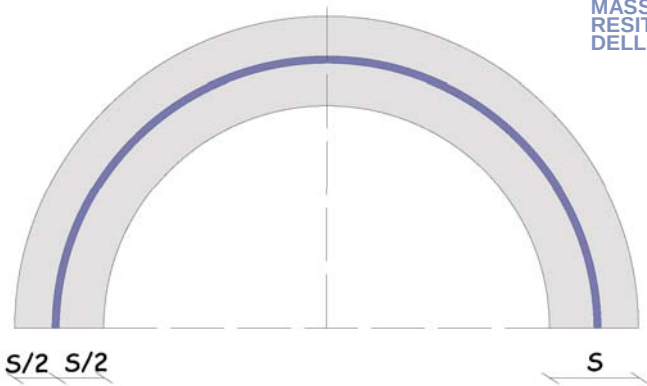
Se si trova in uno stato di equilibrio, esso può essere di due tipi:

EQUILIBRIO MOLTO STABILE

EQUILIBRIO POCO STABILE

EQUILIBRIO MOLTO STABILE =

STATO DI EQUILIBRIO DI MASSIMA RESITENZA DELLA VOLTA

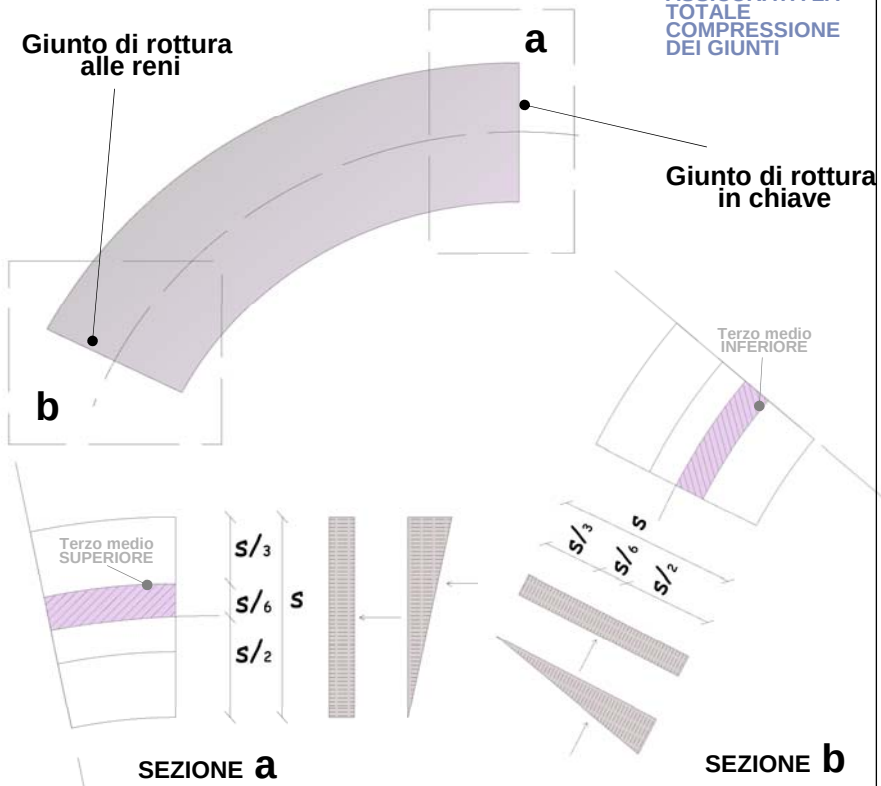


In questo stato i centri di pressione cadranno nei punti di mezzo dei giunti in cui la volta tende ad aprirsi***,"e allora la volta non subirà veruna deformazione, per quanto dipende dalla disposizione meccanica del sistema".***

E' compito del costruttore, attraverso particolari accortezze, fare in modo che si verifichi.

EQUILIBRIO POCO STABILE =

STATO DI EQUILIBRIO IN CUI E ASSICURATA LA TOTALE COMPRESSIONE DEI GIUNTI



L'*Equilibrio* che Salemi Pace definisce "*poco stabile"* si determina quando la curva delle pressioni è compresa in alcune porzioni delle sezioni dei giunti in cui la volta tende ad aprirsi.

Tali "aree di stabilità" vanno dal centro del giunto fino al limite del terzo medio:

INFERIORE (per il centro di pressione alle reni)

SUPERIORE (per il centro di pressione in chiave)

TEOREMA II

"Data una volta in equilibrio, non vi ha, nei giunti in cui essa tende ad aprirsi, che un solo gruppo di punti coniugati, che hanno comune il medesimo valore possibile della spinta in chiave.".

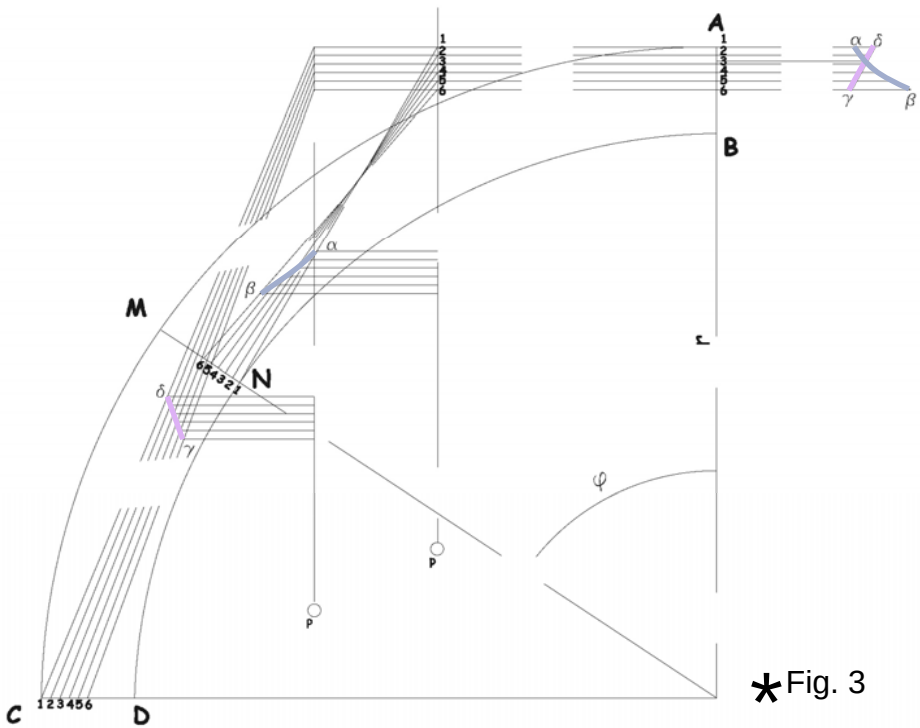


Fig. 3

Salemi Pace considera il profilo ABCD di una semivolta estradossata parallelamente, che si trova allo stato limite di collasso per rotazione della chiave verso il basso. Riassumiamo in passaggi numerati lo svolgimento del suo ragionamento in merito al teorema II.

1) Si trova il giunto di rottura alle reni applicando le formule di Coulomb ("principio dei massimi e minimi")

$$Q = [\, p(x - x_1)]/\, y = f(z)$$

Ponendo:

$$df(z)/dz = 0 \quad (a)$$

otteniamo l'equazione di condizione che determina z (angolo del giunto di rottura alle reni con la verticale).
Così per esempio, introducendo nella equazione (1) il rapporto k tra il raggio dell'estradosso e il raggio dell'intradosso, l'equazione di condizione (a) è la seguente:

$$\mathbf{cosz + (1 - kcosz) \times (z/senz) = k - 2/3\,[(k^3 - 1)/(k + 1)]}$$

2) Si consideri inizialmente solo la parte di volta compresa tra la chiave e il giunto di rottura alle reni (ABNM)

3) Posto che i centri di pressione possono variare:
in chiave dalla mezzeria all'estradosso,
alle reni dall'intradosso alla mezzeria,
alle nascite dalla mezzeria all'estradosso,
si costruiscono i diversi valori possibili della spinta orizzontale (corrispondenti alle coppie dei vari punti coniugati) dividendo la metà superiore del giunto in chiave, a partire dall' estradosso *"in un numero qualunque di parti eguali, numerando i punti di divisione colla serie naturale dei numeri, da sopra in sotto,* e dividendo allo stesso modo la metà del giunto di rottura alle reni, a partire dall'intradosso *"da sotto in sopra".*

4) Si uniscono i punti di intersezione (della direzione orizzontale della spinta in chiave con quella verticale "nota", del peso del concio ABNM) rispettivamente con i punti di numero uguale sul giunto di rottura alle reni.

5) Si costruisce per ogni coppia di punti il 'triangolo delle forze' da cui si deduce, per ogni coppia di punti, il valore della spinta in chiave corrispondente.

6) Il luogo geometrico delle *orizzontali* così trovate, sulle direzioni delle risultanti, è la curva ab.

7) Si trasporti sulla metà superiore del giunto in chiave il diagramma ab16 (vedi Fig. 3). Evidentemente le ordinate della curva ab, a partire dal punto 1, devono essere successivamente crescenti; difatti dalla equazione di equilibrio del concio tra la chiave e il giunto di rottura alle reni

$$Q = [p(x - x_1)] / y$$

vediamo che il numeratore $(x-x_1)$ cresce mentre il denominatore (y) decresce.

8) Si ripeta lo stesso procedimento considerando tutta la semivolta ABDC

9) Allo stesso modo si costruisca la curva dg. In questo caso essa avrà valori progressivamente decrescenti; infatti dalla equazione di equilibrio di una semivolta:

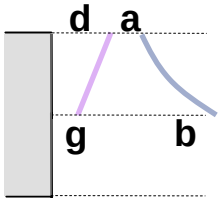
$$Q = [P(x_1 - \quad)] / y_1$$

la quantità $(x_1 - x)$ / y_1 sarà una quantità decrescente.

10) Si trasporti ora anche la curva dg sulla metà superiore del giunto verticale in chiave.

11) Possono verificarsi nella realtà 3 casi:

1° CASO: La curva dg cade al di sotto della curva ab

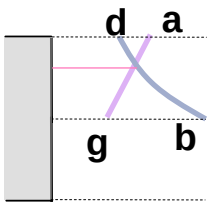


NON È' POSSIBILE ALCUN EQUILIBRIO NELLA VOLTA.

Infatti per qualunque valore della spinta in chiave, fosse anche il minimo possibile 1a,sarebbe:

$$Qy_1' > P(x_1 - \quad) x_1'$$

2° CASO: La curva dg *incontra la* curva ab

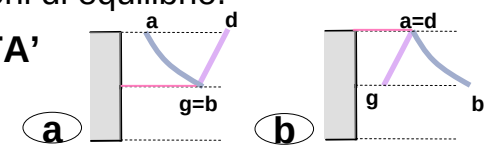


LA VOLTA E' IN EQUILIBRIO.

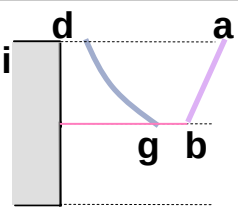
Essendo la curva dg discendente e la curva ab ascendente rispetto al giunto verticale in chiave, esse possono intersecarsi, ma non confondersi e quindi hanno una sola ordinata comune che è la sola che soddisfa le due equazioni di equilibrio.

GRADO DI STABILITA'

a: max stabilità
b: min stabilità



3° CASO: La curva dg cade al di sopra della curva ab



LA VOLTA E' IN EQUILIBRIO.

Infatti è evidente che le parti inferiori presentano un eccesso di resistenza: "*per qualsivoglia valore della spinta orizzontale in chiave, la volta sarà in equilibrio, e siccome per la resistenza che presentano le parti inferiori, le parti superiori possono in chiave sviluppare tutta quanta la loro azione",* la spinta che si verifica è b.

TEOREMA III

" Il gruppo dei punti coniugati dei giunti in cui la volta tende ad aprirsi e che hanno comune il medesimo valore della spinta in chiave, non che quest'unico valore ad essi relativo, corrispondono all'unico modo in cui l'equilibrio della volta realmente si verifica".

Data una volta simmetrica simmetricamente sovraccaricata, in equilibrio, esiste una sola curva dei centri di pressione che realmente si verifica.
Tale curva può essere totalmente determinata se si conoscono almeno due punti per i quali passa, ma allo stesso modo è determinata se si conosce:

- L'INTENSITÀ' DELLA SPINTA ORIZZONTALE IN CHIAVE
- IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA SPINTA IN CHIAVE

Per i due teoremi precedenti noi sappiamo determinare l'unico valore della spinta in chiave che nella data volta realmente si verifica, nonché sul gruppo dei punti coniugati sui giunti della chiave, alle reni e alle nascite, per i quali deve necessariamente passare la curva dei centri di pressione.
E' dunque dimostrato, secondo Salemi Pace, il terzo teorema che conclude la sua analisi.

Considerazioni sul metodo proposto

Al termine dell'esposizione del suo metodo (estensibile a tutte le volte simmetriche simmetricamente sovraccaricate, policentriche o a un solo centro, complete o incomplete, estradossate parallelamente od orizzontalmente, con piedritti o senza) Salemi Pace fa delle precisazioni su alcuni punti che possono sembrare poco chiari.
In primo luogo, secondo Salemi Pace, sul suo metodo si può obiettare che sia stata implicitamente ammessa la variazione, in quantità proporzionali, dei "punti coniugati". A ciò egli risponde che, considerate le esperienze di Boistard, non è possibile non ammettere una legge proporzionale nello spostamento di tali punti:
"*difatti, se così non fosse, non potrebbero questi punti trasportarsi dall'estradosso all'intradosso e viceversa".*
In secondo luogo precisa che la non considerazione della deformabilità della materia non rende vano il suo ragionamento, sia per la effettiva *poca compressibilità delle pietre* - che di norma costituiscono la volta (e quindi ha pochissima influenza) - *sia perché i larghi limiti di stabilità che generalmente si è obbligati ad introdurre nelle costruzioni, fanno sì che i risultati reali non si discostino molto dalla realtà.*

L'ANALISI ELASTICA:
["ALBERTO CASTIGLIANO"]

THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE

DES

SYSTÈMES ÉLASTIQUES

ET SES APPLICATIONS

PAR

A. CASTIGLIANO

Ingénieur des chemins de fer de la Haute Italie

TURIN

AUGUSTE FRÉDÉRIC NEGRO

Éditeur.

Il contributo di ALBERTO CASTIGLIANO è degno di nota. Egli si inserisce perfettamente nell'ambito degli studi di fine ottocento sulla teoria elastica, definendo un interessante metodo ed applicandolo su strutture esistenti. Abbiamo detto che nel 1870 applicò le formule dedotte dai teoremi sul lavoro di deformazione al calcolo delle volte murarie. D'altronde il suo primo teorema (che dimostra in modo rigoroso quello di LUIGI FEDERICO MENABREA, nel 1873) è equivalente al principio dei lavori virtuali ed è tuttora utilizzato per risolvere un numero straordinario di problemi strutturali.
A Castigliano si devono inoltre importanti studi sulla definizione di formule razionali ed esempi numerici per il calcolo degli archi in muratura, che affronterà nella *Théorie des systèmes élastiques* del 1879 (di cui riportiamo un'analisi in Fig. 2 di pag. 36) trattando appunto dei "sistemi imperfettamente elastici come gli archi in muratura", e fornendo due notevoli applicazioni del suo metodo per lo studio del ponte Mosca sulla Dora a Torino (Fig. 1) e di un ponte ferroviario sull'Oglio lungo la linea Milano-Venezia.Egli motivò il nuovo approccio metodologico basandosi sul fatto che, "*essendo i sistemi composti di corpi anche non perfettamente elastici compressibili e quindi suscettibili di deformarsi e, in più, essendo le loro deformazioni tanto maggiori quanto più lo sono le forze che le producono, ne segue che le deformazioni sono funzioni delle forze esterne. In conseguenza, se si ha un sistema imperfettamente elastico soggetto a qualche condizione geometrica, si determineranno le forze elastiche incognite esprimendo le condizioni geometriche alle quali il sistema deve soddisfare. Se, in più, la compressibilità dei corpi imperfettamente elastici è proporzionale alle pressioni, come ha luogo, entro certi limiti, nei corpi perfettamente elastici, è facile vedere che la distribuzione delle forze interne si fa esattamente allo stesso modo che in questi ultimi corpi*". Si tratta di una linea interpretativa dell'elasticità che riflette quella di Hooke, Green, Thomson, e che persisterà a lungo: l'elasticità era vista come proprietà universale dei corpi, almeno entro limiti di applicazione delle forze tali da assicurare la reversibilità della deformazione. Un contributo notevole per uno studioso di origini modestissime andato via purtroppo molto presto, a non ancora 37 anni, nel 1884.

Nelle pagine a seguire:

Fig. 1
Studio del ponte Mosca compiuto da Castigliano (1879) applicando i teoremi sul lavoro di deformazione.

Fig. 2
Studio all'interno del suo *Théorie de l'équilibre des systèmes elastiques et ses applications* del 1879.

Fig. 1

ETUDE DU PONT EN PIERRE DE TAILLE

construit sur la Doire à Turin, par l'ingénieur Charles Mosca.

Fig 1.

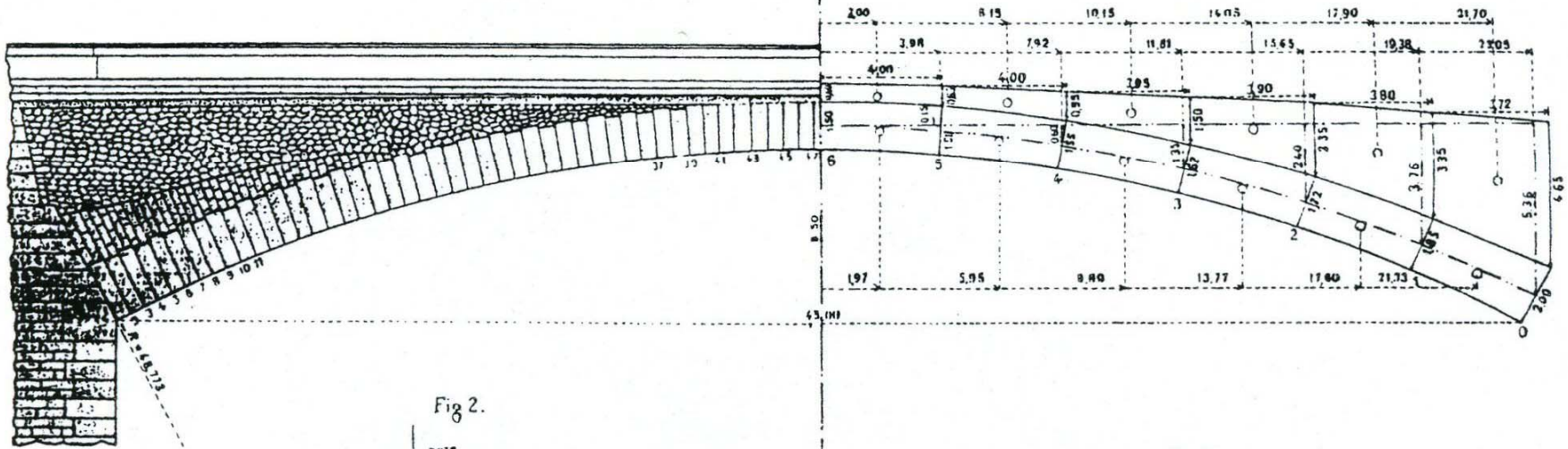


Fig 2.

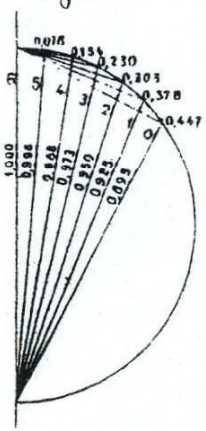


Fig 4

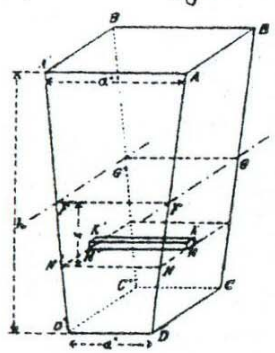
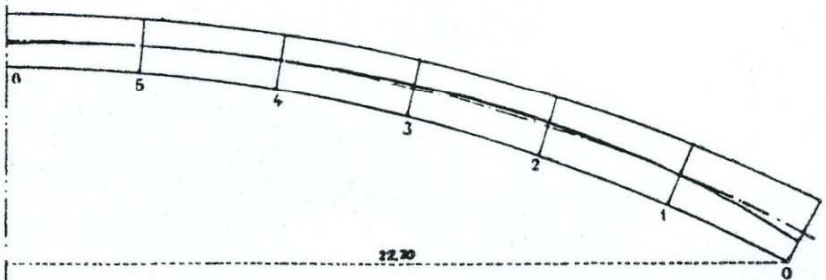
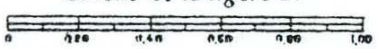


Fig 3



Échelle de la figure 2.



Échelle des figures 1 et 3.

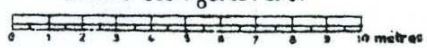


Fig. 2

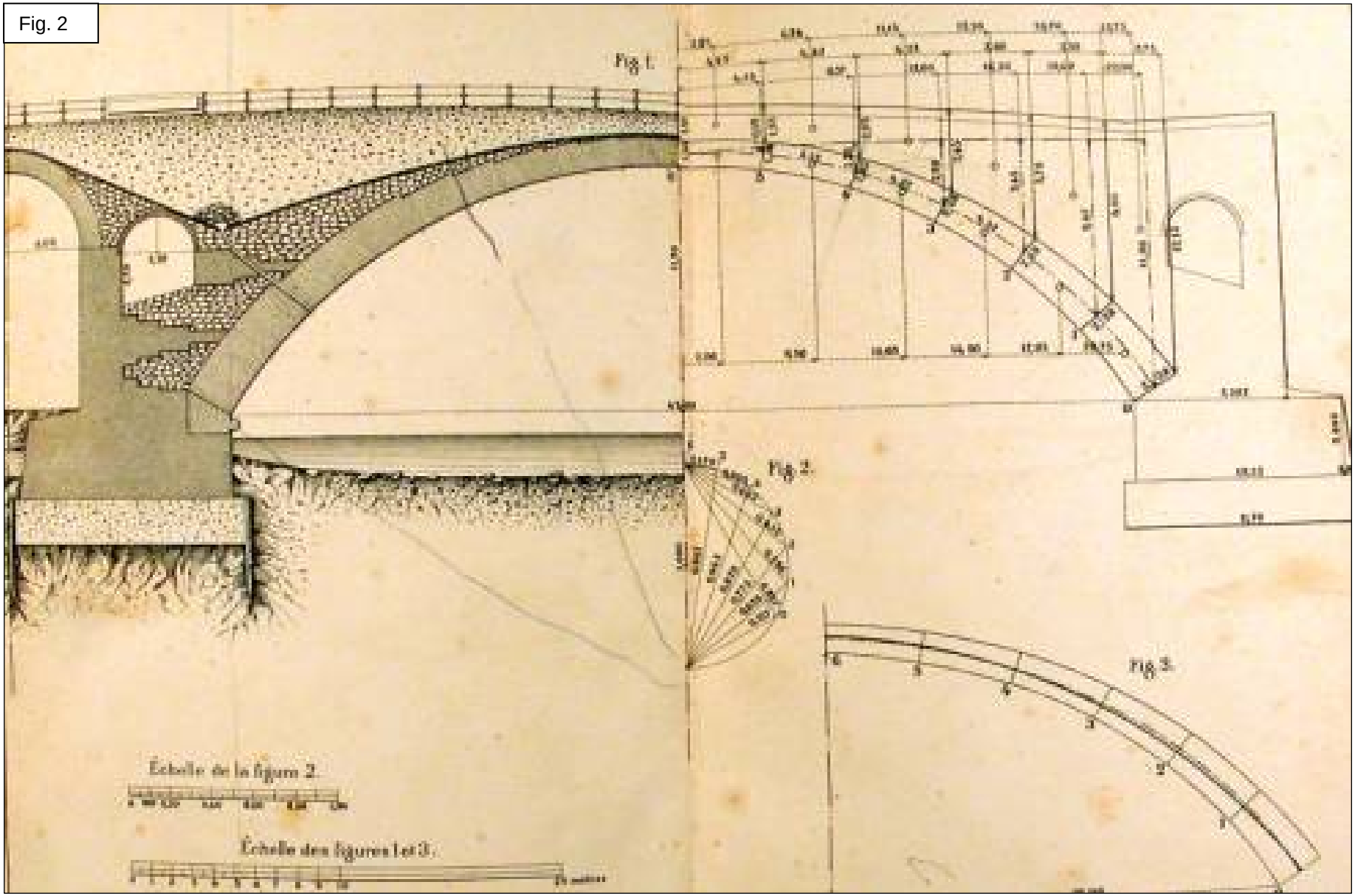


Fig 1.
Fig 2.
Fig 3.
Échelle de la figure 2.
Échelle des figures 1 et 3.

CRONOLOGIA DEGLI STUDI ITALIANI

1748

G. POLENI, *Memorie istoriche della gran cupola del Tempio Vaticano*, Stamperia del Seminario, Padova 1748

1765

P. FRISI, *Sei teoremi circa la forza che agisca nei diversi archi*, Milano 1765

1777

P. FRISI, *Instituzioni di meccanica, d'idrostatica, d'idrometria e dell'architettura statica, e idraulica*, G.Galeazzi, Milano 1777

1780

G. RICCATI, *Della figura e dello sfiancamento degli archi. Dissertazione fisico - matematica*, "Continuazione del Nuovo Giornale de' Letterati", 1780

1782

A.M. LORGNA, *Saggi di statica e meccanica applicate alle arti*, VERONA 1782

1783

P. FRISI, *Dell'equilibrio delle cupole e delle volte*, "Atti della Società Patriottica", 1783

A.M. LORGNA, *De curvarum in concamerationibus impulsu, nova Theoria*, “Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae”, 1783

1785
LORENZO MASCHERONI, *Nuove ricerche sull’equilibrio delle volte*, 1785

1826
A. BORDONI, *Nota di stereotomia sopra i cunei dei ponti in isbieco*, MILANO 1826

1829
LORENZO MASCHERONI, *Nuove ricerche sull’equilibrio delle volte*, MILANO 1829

1833
V. AMICI, *Sul problema dell’Equilibrio delle Volte*, MODENA 1833

1836
F.BERTELLI, *Saggio di una teoria sull’equilibrio delle volte applicabile con generalità alla pratica*, BOLOGNA 1836

1839
L. TATTI, *Sul taglio dei cunei in isbieco, osservazioni dell’ingegnere Francesco Colombani*, “Il Politecnico”, 1839

1847
G. CODAZZA, *Sull’equilibrio astratto delle volte*, PAVIA 1847

1858
G. CAVALLI, *Memoria sul delineamento equilibrato degli archi in muratura e in armatura*, in “Atti dell’Accademia delle Scienze di Torino” 1858

1860
D. BOCCI, *Memoria intorno alla curva di equilibrio delle arcate dei ponti*, in “Giornale Arcadico”, ROMA 1860

1866
C. CAMPUZANO, *Application práctica de la teoria de Mr. Ivon Villarceau sobre bóvedas de má xima estabilidad*, “Revista de Obras Publicas”, 1866

1868
G. CLERICO, *Stabilità degli archi*, “Il Politecnico”, 1868

1871
C. CLERICETTI, *Esperienze sui materiali*, “Il Politecnico”, 1871

1873
C. CLERICETTI, *Il principio della cerniera nelle*

CESARE CERADINI, *Sull'equilibrio delle volte*, PALERMO 1873

1875

C. CLERICETTI, *Intorno ad alcune esperienze sulla resistenza delle volte in cemento*, "Il Politecnico", 1875

F. CROTTI, *Esame critico di una recente deliberazione dell'Istituto lombardo delle scienze circa la teoria delle volte*, MILANO 1875

G. CURIONI, *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle volte*, in "Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino", s. II, 27,1875; lo stesso studio è riportato anche nel vol. IV della *Appendice all'arte del fabbricare*, 1875

1876

A. CASTIGLIANO, *Formole razionali ed esempi numerici per il calcolo pratico degli archi metallici e delle volte a botte murali*, in "L'Ingegneria Civile e le Arti Industriali, 1876

C. CLERICETTI, *La cerniera ed il principio dei punti di egual pressione nelle volte*, "Il Politecnico", 1876

1877

G. CURIONI, *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle volte*, in "Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino", s. II, 31,1877

1879

A. CASTIGLIANO, *Théorie de l'equilibre des systèmes élastiques et ses applications*, TORINO 1879-80; le stesse applicazioni sono contenute anche in *Strade Ferrate dell'Alta Italia, Servizio della manutenzione e dei lavori, Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici. Studi dell'Ufficio d'Arte*, MILANO 1878

G. CURIONI, *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle volte*, in "Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino", s. II, 32,1879

GIOVANNI SALEMI PACE, *Sull'equilibrio delle volte simmetriche simmetricamente sopraccaricate*, in "Giornale di Scienze naturali ed economiche di Palermo", PALERMO 1879

1880

C. GUIDI, *Sulla curva delle pressioni nelle volte*, in "Rend. Accad. Delle Scienze di Torino" 1880

C. CERADINI, *Sui calcoli di stabilità degli archi metallici e delle volte dei ponti in muratura*, “Il Politecnico”, 1880-81

A. LA MANNA, *Le ultime teorie relative all’equilibrio delle volte in muratura*, PALERMO 1880

1882

C. CERADINI, *Stabilité des arcs métalliques et des voûtes*, Desoer, LIÈGE 1882

1883

C. GUIDI, *Sugli archi elastici*, in “Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino” 1883

1884

GIOVANNI SALEMI PACE, *Sull’equilibrio delle volte simmetriche note*, PALERMO 1884

1883

C. GUIDI, *Sugli archi elastici*, in “Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino” 1883

1884

GIOVANNI SALEMI PACE, *Sull’equilibrio delle volte simmetriche note*, PALERMO 1884

1885

C. CERADINI, *Sull’equilibrio delle cupole in muratura*, anno scolastico 1885-86

C. GUIDI, *Sulla curva delle pressioni negli archi e nelle volte*, in “Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino” 1885

1887

C. CERADINI, *La curva delle pressioni nelle volte cilindriche*, “Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti Italiani”, 1887

C. CERADINI, *Sull’equilibrio delle cupole in muratura*, “Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti Italiani”, 1887

C. VIOLA, *Sulla stabilità delle murature*, ROMA 1887

1888

A. CASTIGLIANO, *Stabilità delle costruzioni in terra e in muratura*, TORINO 1888

C. GUIDI, *L’arco elastico*, TORINO 1888

L. LANINO, *I due nuovi ponti costruiti sul Malone e sull’Orco per la strada provinciale da Torino a Milano*, in “L’Ingegneria Civile e le Arti Industriali 1888

C. VIOLA, *Equilibrio degli archi e delle piattabande*, “Il Politecnico”, 1888

1890

G. G. FERRIA, *Sulla stabilità delle volte caricate colla regola di Schwedler*, in “Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 1890

C. FERRARO, *Cupola in muratura per la chiesa di S. Domenico in Palermo*, “Atti del Collegio degli Ingegneri e degli Architetti di Palermo”, 1890

1893

G. G. FERRIA, *Sulla determinazione della curva delle pressioni nel terzo medio dello spessore delle volte da ponte*, in “Giornale del Genio Civile”, 1893

D. ZAULI, *Verifica della stabilità di un’arcata di ponte proposta dall’Arch. Cimbro Gelati in un suo progetto di ponte sul Po per la città di Torino*, in “L’Ingegneria Civile e le Arti Industriali” 1893

1901

GIOVANNI SALEMI PACE, *Resistenza delle pietre alla compressione sotto l’influenza di sostanze elastiche tra le superficie compresse*, in “Atti del Collegio degli Ingegneri e Architetti in

1903

M. GRECO, *Sull’applicazione della teoria degli archi elastici alle volte in muratura*, “Atti del Collegio degli Ingegneri e Architetti in Palermo”, 1903

C. GUIDI, *L’arco elastico senza cerniere*, in “Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino” 1903

C. GUIDI, *L’arc élastique sans articulations*, LAUSANNE 1903

1904

L. CARACCIOLO, *Alcune note riguardanti la forma e le dimensioni degli archi in muratura a tre cerniere*, “L’ingegneria Civile e le Arti Industriali”, 1904

1905

C. GUIDI, *Una proprietà degli archi elastici*, “Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino”, 1905

1906

C. GUIDI, *I progressi della Scienza e dell’Arte del Costruire*, in “Rivista Tecnica” TORINO 1906

C. GUIDI, *Influenza della temperatura sulle costruzioni murarie*, “Atti della Reale Accademia

1908

C. FERRARIO, *Esame critico delle formole in uso per il calcolo delle spalle o piedritti alle volte circolari*, “Il Politecnico”, 1908

C. GUIDI, *Contributo alla teoria degli archi elastici*, “Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino”, 1908

1911

G. CAMPANELLA, *Teoria dell’arco elastico del Ritter applicato alla verifica degli archi di fabbrica*, “Giornale del Genio Civile”, 1911

1913

G. COLONNETTI, *Sulla teoria degli archi*, “Giornale del Genio Civile”, 1913

1924

C. CERADINI, *Considerazioni sulla determinazione della grossezza delle volte*, “Annali dei Lavori Pubblici”, 1924

1928

E. MIOZZI, *Il razionale tracciamento della fibra media delle volte*, “Monitore Tecnico”, dicembre 1928

1981

C. GUENZI, *L’arte di edificare*. *Manuali in Italia 1750-1950*, MILANO 1981

1986

S. DI PASQUALE, *Questioni concernenti la meccanica delle murature. Storia e prospettive,* in *Architettura e terremoti. Il caso di Parma: 9 novembre 1983*, PARMA 1986

1994

M. RAPALLINI, *La statica delle cupole in muratura da G. Poleni a W. Prager*, tesi di dottorato, Facoltà di Architettura, Università di Firenze 1994

BIBLIOGRAFIA

• ANTONIO BECCHI - FEDERICO FOCE, *Degli archi e delle volte*, SAGGI MARSILIO, 2002

• *Palladio – rivista di storia dell'architettura e restauro*, ISTITUTO POLIGRAFICO E ZECCA DELLO STATO LIBRERIA DELLO STATO, N.2 DICEMBRE 1988

• LORENZO MASCHERONI, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, 1785

• CELESTE CLERICETTI, *La cerniera ed il principio dei punti di egual pressione nelle volte*, MILANO 1876

• GIOVANNI SALEMI PACE, *Sull'equilibrio delle volte simmetriche simmetricamente sopraccaricate*, PALERMO 1879

• GIOVANNI SALEMI PACE, *Sull'equilibrio delle volte simmetriche note*, PALERMO 1884